DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe buZR9L

Ein Getränkehersteller kühlt eine Charge in einer Schnellkühlkammer. Entscheidend ist, wann die Zieltemperatur unterschritten wird und wann die Abkühlung besonders „heftig“ oder wieder „sanft“ wird (Produktqualität/Glasbruchrisiko). Die Temperatur (in °C) wird beschrieben durch

$$T(t) = 0.015t^3 - 0.375t^2 + 0.75t + 22$$

mit $0 \leq t \leq 12$, t in Minuten.

a) Ermitteln Sie den frühesten Zeitpunkt, zu dem die Zieltemperatur von 7 °C erreicht wird, damit festgelegt werden kann, ab wann die Flaschen ausgeliefert bzw. serviert werden dürfen.

$$\begin{aligned} T(t) &= 7 \\ 7 &= 0.015t^3 - 0.375t^2 + 0.75t + 22 && | -7 \\ 0 &= 0.015t^3 - 0.375t^2 + 0.75t + 15 && | :0.015 \\ &= t^3 - 25t^2 + 50t + 1000 && | t_1 = 10 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	− 25	50	1000
10		10	− 150	− 1000
	1	− 15	− 100	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 15t - 100 \\ t_{2/3} &= 7.5 \pm \sqrt{7.5^2 + 100} \\ t_2 &= 20 \quad \vee \quad t_3 = -5 \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \leq t \leq 12$ liegt nur $t_1 = 10$.

Die Zieltemperatur von 7 °C wird somit erstmals nach 10 Minuten erreicht.

b) Prüfen Sie am Modell, ob die Temperatur am Ende der vorgesehenen Kühlzeit die empfohlene Tiefsttemperatur von 4 °C unterschritten hat. Formulieren Sie daraus eine kurze Empfehlung für den Hersteller.

$$\begin{aligned} T(12) &= 0.015 \cdot 12^3 - 0.375 \cdot 12^2 + 0.75 \cdot 12 + 22 \\ &= 25.92 - 54 + 9 + 22 \\ &= 2.92 \end{aligned}$$

Am Ende der Kühlzeit liegt die Temperatur bei 2.92 °C. Damit wurde die empfohlene Tiefsttemperatur von 4 °C unterschritten.

Empfehlung: Die Kühlzeit sollte etwas verkürzt werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Prüfen Sie, ob die Vorgabe der Qualitätssicherung eingehalten wird: Die Temperatur darf im Kühlprozess zu keinem Zeitpunkt schneller als 3 °C pro Minute abfallen.

Die schnellste Abkühlung liegt dort vor, wo die Steigung von $T(t)$ am kleinsten ist. Dieser Zeitpunkt entspricht dem Wendepunkt der Funktion.

$$\begin{aligned} T'(t) &= 0.045t^2 - 0.75t + 0.75 \\ T''(t) &= 0.09t - 0.75 \\ T'''(t) &= 0.09 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $T''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.09t - 0.75 && | +0.75 \\ 0.09t &= 0.75 && | :0.09 \\ t &= \frac{25}{3} \approx 8.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $T''(t) = 0 \quad \wedge \quad T'''(t) \neq 0$

$$T'''\left(\frac{25}{3}\right) = 0.09 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Wegen $T'''(t) > 0$ hat T' dort ein Minimum, die Abkühlung ist also am stärksten.

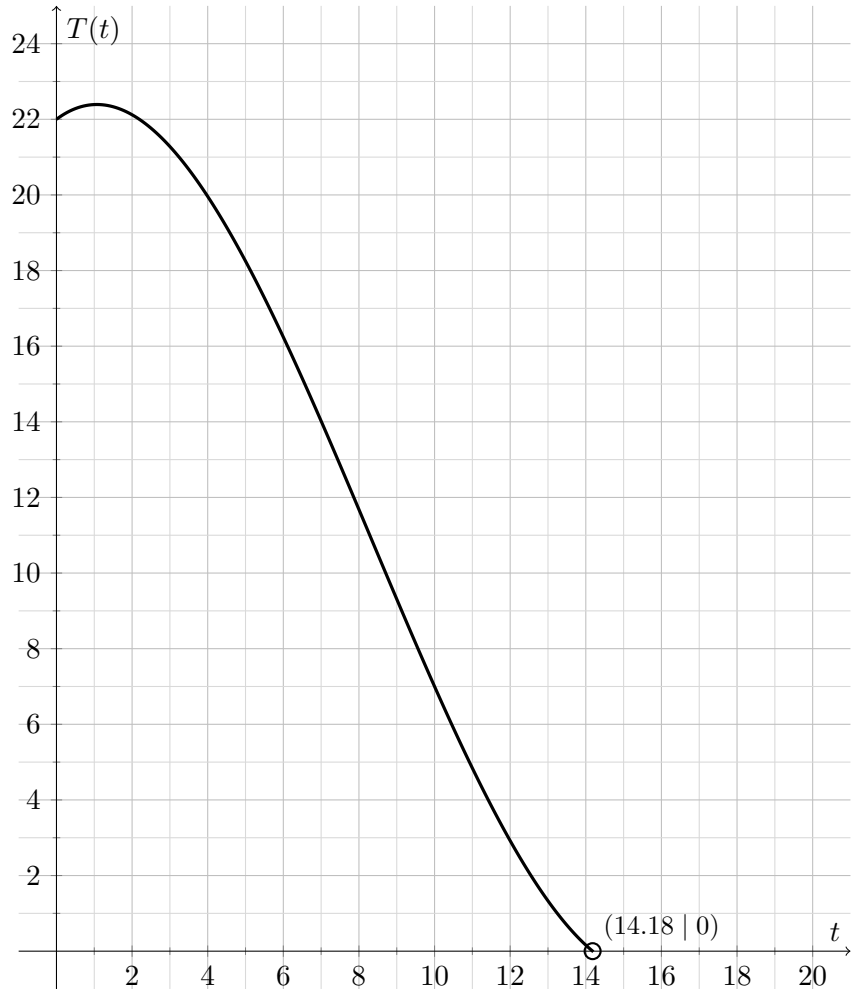
Steigung an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} T'\left(\frac{25}{3}\right) &= 0.045 \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^2 - 0.75 \cdot \frac{25}{3} + 0.75 \\ &= 3.125 - 6.25 + 0.75 \\ &= -2.375 \end{aligned}$$

Nach etwa 8.33 Minuten fällt die Temperatur am schnellsten, und zwar mit 2.375 °C pro Minute. Da $-2.375 > -3$ ist, wird die Vorgabe der Qualitätssicherung eingehalten. Die Temperatur fällt zu keinem Zeitpunkt schneller als 3 °C pro Minute.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Eine Charge bleibt versehentlich länger in der Kühlung. Zeichnen Sie den Funktionsverlauf und schätzen Sie ab, ab wann die Temperatur in den kritischen Bereich fällt, in dem Gefrieren wahrscheinlich wird, sodass Flaschen platzen könnten.



Nach etwa 14.18 Minuten werden 0 °C erreicht. Ab dann drohen die Flaschen zu gefrieren und zu platzen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**