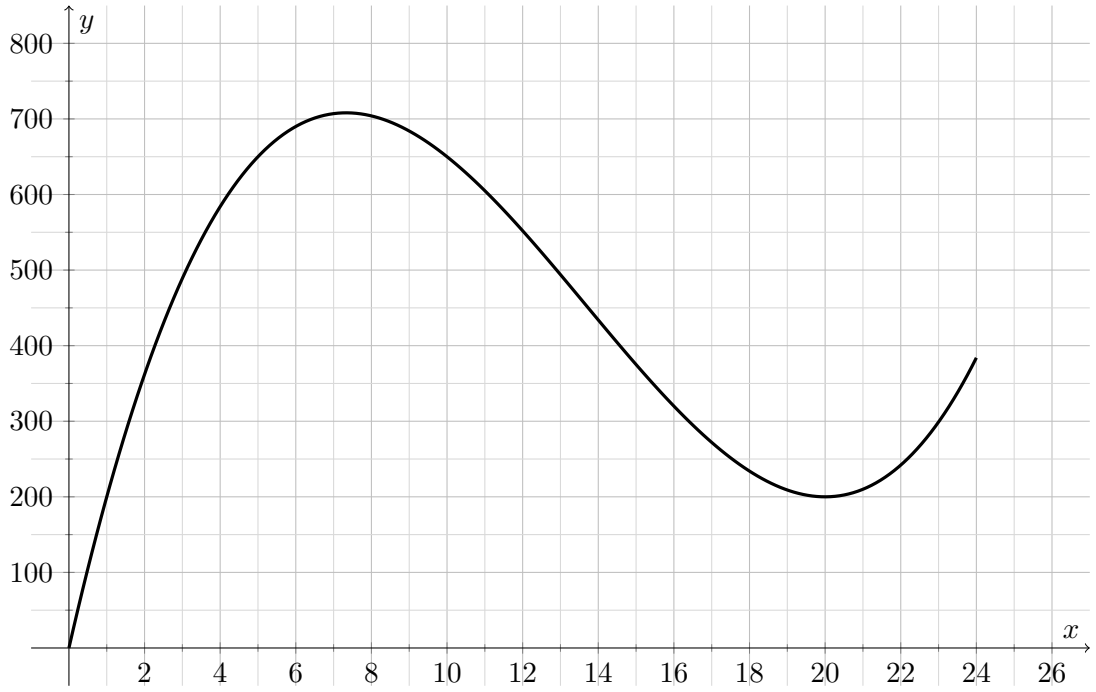
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe bgBdg6

In einen Stausee strömt Wasser aus einem kleinen Fluss. Die Zuflussrate kann geregelt werden und lässt sich im Zeitraum von 0 bis 24 Stunden durch die Funktion

$$f(x) = 0.5x^3 - 20.5x^2 + 220x$$

modellieren (x in h, $f(x)$ in m^3/h).



a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Zuflussrate ihren größten Wert annimmt.

$$f'(x) = 1.5x^2 - 41x + 220$$
$$f''(x) = 3x - 41$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 1.5x^2 - 41x + 220 && \mid :1.5 \\ &= x^2 - \frac{82}{3}x + \frac{440}{3} \\ x_{1/2} &= \frac{41}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{41}{3}\right)^2 - \frac{440}{3}} \\ x_1 &= 20 \quad \vee \quad x_2 = \frac{22}{3} \approx 7.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(20) &= 3 \cdot 20 - 41 = 19 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''\left(\frac{22}{3}\right) &= 3 \cdot \frac{22}{3} - 41 = -19 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(\frac{22}{3}\right) = 0.5 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^3 - 20.5 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^2 + 220 \cdot \frac{22}{3} \approx 708.074 \qquad \Rightarrow \text{HP}(7.33 \mid 708.07)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Am Rand gilt $f(0) = 0$ und $f(24) = 384$, beide Werte sind kleiner. Die Zuflussrate nimmt also nach $\frac{22}{3}\,\text{h} \approx 7.33\,\text{h}$ ihren größten Wert von etwa $708.07\,\text{m}^3/\text{h}$ an.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt.

Die Zuflussrate nimmt am stärksten ab, wenn die Steigung von $f(x)$ am kleinsten ist. Gesucht ist also die Wendestelle von f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1.5x^2 - 41x + 220 \\ f''(x) &= 3x - 41 \\ f'''(x) &= 3 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 41 && \mid +41 \\ 3x &= 41 && \mid :3 \\ x &= \frac{41}{3} \approx 13.667 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{41}{3}\right) = 3 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Steigung an der Wendestelle:

$$f'\left(\frac{41}{3}\right) = 1.5 \cdot \left(\frac{41}{3}\right)^2 - 41 \cdot \frac{41}{3} + 220 = -\frac{361}{6} \approx -60.17 < 0$$

Da $f'''(x) > 0$ ist, hat f' an dieser Stelle seinen kleinsten Wert. Die Zuflussrate nimmt also nach $\frac{41}{3}\,\text{h} \approx 13.67\,\text{h}$ am stärksten ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**