DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ak868S

Ein Freibad wird zweimal täglich stoßgechlort. Zwischen den Chlorungen wird der aktuelle Chlorwert laufend überwacht. Für das Beckenwasser soll der Gehalt an freiem Chlor im Bereich von 0.35 mg/L bis 0.55 mg/L liegen. Als Zielwert wird 0.45 mg/L festgelegt. Die Funktion $c(x)$ beschreibt die Abweichung vom Zielwert (in mg/L):

- $c(x) = 0$: Zielwert 0.45 mg/L erreicht
- $c(x) > 0$: Chlorwert über 0.45 mg/L
- $c(x) < 0$: Chlorwert unter 0.45 mg/L

Dabei ist x die Zeit in Stunden seit der letzten Stoßchlorung ($0 \leq x \leq 9$). Die Abweichung wird modelliert durch

$$c(x) = -0.0003x^4 + 0.0036x^3 - 0.0081x^2 - 0.0324x + 0.0972.$$

a) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen der Zielwert exakt erreicht wird, und geben Sie an, in welchen Zeitabschnitten das Becken überdosiert bzw. unterdosiert ist.

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0003x^4 + 0.0036x^3 - 0.0081x^2 - 0.0324x + 0.0972 && | :(-0.0003) \\ &= x^4 - 12x^3 + 27x^2 + 108x - 324 && | \, x_1 = 3 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	1	-12	27	108	-324
3		3	-27	0	324
	1	-9	0	108	0

$$0 = x^3 - 9x^2 + 108 \quad | \, x_2 = -3$$

	1	-9	0	108
-3		-3	36	-108
	1	-12	36	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 12x + 36 \\ x_{3/4} &= 6 \pm \sqrt{6^2 - 36} \\ x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$x_2 = -3$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs. Der Zielwert wird nach 3 Stunden und nach 6 Stunden exakt erreicht.

Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ ist das Becken überdosiert. Ab $x = 3$ ist es unterdosiert. Bei $x = 6$ (doppelte Nullstelle) wird der Zielwert zwar noch einmal exakt erreicht, anschließend fällt der Chlorwert jedoch sofort wieder unter den Zielwert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Freigabe ist besonders wichtig, wann die Abweichung am größten (in beide Richtungen) ausfällt. Bestimmen Sie diese Zeitpunkte und beurteilen Sie im Kontext, ob die zulässigen Grenzwerte eingehalten werden. Prüfen Sie dazu auch die Grenzwerte.

$$c'(x) = -0.0012x^3 + 0.0108x^2 - 0.0162x - 0.0324$$
$$c''(x) = -0.0036x^2 + 0.0216x - 0.0162$$

notw. Bed.: $c'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0012x^3 + 0.0108x^2 - 0.0162x - 0.0324 && | :(-0.0012) \\ &= x^3 - 9x^2 + 13.5x + 27 && | \, x_1 = 6 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	1	-9	$\frac{27}{2}$	27
6		6	-18	-27
	1	-3	$-\frac{9}{2}$	0

$$0 = x^2 - 3x - 4.5$$
$$x_{2/3} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 4.5}$$
$$x_2 \approx 4.098 \quad \vee \quad x_3 \approx -1.098$$

$x_3 \approx -1.098$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs.

hinr. Bed.: $c'(x) = 0 \quad \wedge \quad c''(x) \neq 0$

$$c''(6) = -0.0036 \cdot 6^2 + 0.0216 \cdot 6 - 0.0162 = -0.0162 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$c''(4.098) = -0.0036 \cdot 4.098^2 + 0.0216 \cdot 4.098 - 0.0162 \approx 0.0119 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $c(x) = y$

$$c(6) = 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}(6 \mid 0)$$
$$c(4.098) \approx -0.0085 \qquad \Rightarrow \text{TP}(4.10 \mid -0.0085)$$

Randwerte:

$$c(0) = 0.0972$$
$$c(9) = -0.1944$$

Laut Vorgabe darf der Chlorwert höchstens um 0.1 mg/L nach oben oder unten vom Zielwert abweichen. Die größte Abweichung nach oben tritt zu Beginn ($x = 0$) mit 0.0972 mg/L auf, die Obergrenze wird also eingehalten. Die größte Abweichung nach unten tritt am Ende des Zeitraums ($x = 9$) mit rund 0.19 mg/L auf. Dort liegt der Chlorwert mit etwa 0.26 mg/L deutlich unter der Untergrenze von 0.35 mg/L, das Becken ist klar unterdosiert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Formulieren Sie ein kurzes begründetes Schließungskriterium: Ab wann müsste das Becken geschlossen (oder neu gechlort) werden, da die Grenzwerte unterschritten werden? Eine kompetente Abschätzung der Zeitwerte ist vollkommen ausreichend.

Gesucht ist der Zeitpunkt, ab dem die Untergrenze unterschritten wird, also $c(x) = -0.1$.

$$\begin{aligned} c(x) &= -0.1 \\ -0.0003x^4 + 0.0036x^3 - 0.0081x^2 - 0.0324x + 0.0972 &= -0.1 \quad | +0.1 \\ -0.0003x^4 + 0.0036x^3 - 0.0081x^2 - 0.0324x + 0.1972 &= 0 \end{aligned}$$

Die Tabellenfunktion des Taschenrechners mit der Schrittweite 1 zeigt durch einen Vorzeichenwechsel eine Nullstelle zwischen 8 und 9. Eine genauere Untersuchung im Intervall $[8; 9]$ mit der Schrittweite 0.1 liefert die Nullstelle zwischen 8.3 und 8.4:

$$\begin{aligned} c(8) &\approx -0.066 \quad > -0.1 \\ c(8.3) &\approx -0.095 \quad > -0.1 \\ c(8.4) &\approx -0.106 \quad < -0.1 \\ c(9) &\approx -0.194 \quad < -0.1 \end{aligned}$$

Nach rund 8.3 Stunden müsste das Becken geschlossen oder erneut gechlort werden, weil der Chlorwert dann unter die zulässige Untergrenze von 0.35 mg/L fällt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**