DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe acUHYW

Beim Entwickeln eines kompakten Lautsprechergehäuses wird untersucht, wie stark das Gehäuse bei bestimmten Frequenzen mitschwingt. Die modellhafte Schwingungsamplitude $A(f)$ hängt von der Frequenz f ab (in kHz). Für $0 \leq f \leq 5$ gilt:

$$A(f) = f^4 - 10f^3 + 29f^2 - 20f$$

a) Bestimmen Sie die Frequenzen, bei denen das Gehäuse nicht mitschwingt.

$$\begin{aligned} 0 &= f^4 - 10f^3 + 29f^2 - 20f \\ &= f(f^3 - 10f^2 + 29f - 20) \quad | \, f_1 = 0 \end{aligned}$$

$$0 = f^3 - 10f^2 + 29f - 20 \qquad | \, f_2 = 1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit f rechnen.

	1	− 10	29	− 20
1		1	− 9	20
	1	− 9	20	0

$$\begin{aligned} 0 &= f^2 - 9f + 20 \\ f_{3/4} &= 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 20} \\ f_3 &= 5 \quad \vee \quad f_4 = 4 \end{aligned}$$

Bei den Frequenzen 1 kHz, 4 kHz und 5 kHz schwingt das Gehäuse nicht mit (ebenso am Rand bei $f = 0$ kHz).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Ermitteln Sie die Frequenzen, bei denen die Amplitude lokal maximal bzw. lokal minimal ist. Interpretieren Sie diese Punkte als „kritische Resonanzbereiche“ bzw. „ruhige Bereiche“.

$$A'(f) = 4f^3 - 30f^2 + 58f - 20$$
$$A''(f) = 12f^2 - 60f + 58$$

notw. Bed.: $A'(f) = 0$

$$0 = 4f^3 - 30f^2 + 58f - 20 \quad | \, f_1 = 2.5$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen und der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten und f rechnen.

	4	-30	58	-20
$\frac{5}{2}$		10	-50	20
	4	-20	8	0

$$\begin{aligned} 0 &= 4f^2 - 20f + 8 && | :4 \\ &= f^2 - 5f + 2 \\ f_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 2} \\ f_2 &\approx 4.562 \quad \vee \quad f_3 \approx 0.438 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $A'(f) = 0 \quad \wedge \quad A''(f) \neq 0$

$$\begin{aligned} A''(2.5) &= 12 \cdot 2.5^2 - 60 \cdot 2.5 + 58 = -17 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ A''(4.562) &= 12 \cdot 4.562^2 - 60 \cdot 4.562 + 58 \approx 34.022 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ A''(0.438) &= 12 \cdot 0.438^2 - 60 \cdot 0.438 + 58 \approx 34.022 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $A(f) = y$

$$\begin{aligned} A(2.5) &= 14.0625 && \Rightarrow \text{HP}(2.5 \mid 14.06) \\ A(4.562) &\approx -4 && \Rightarrow \text{TP}_1(4.56 \mid -4) \\ A(0.438) &\approx -4 && \Rightarrow \text{TP}_2(0.44 \mid -4) \end{aligned}$$

Bei $f = 2.5\,\text{kHz}$ ist die Amplitude lokal maximal ($A \approx 14.06$). Dort schwingt das Gehäuse am stärksten mit, das ist ein kritischer Resonanzbereich. Bei $f \approx 0.44\,\text{kHz}$ und $f \approx 4.56\,\text{kHz}$ ist die Amplitude lokal minimal. Im Sinne der Aufgabe sind das die ruhigen Bereiche. Der Betrag der Schwingung ist dort mit $|A| = 4$ allerdings nicht null; für die tatsächliche Stärke der Schwingung müsste der Betrag $|A(f)|$ betrachtet werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Finden Sie die Frequenzen, an denen der Verlauf seine Krümmung wechselt. Beschreiben Sie kurz, was das über das „Umschalten“ zwischen stärker werdender und schwächer werdender Resonanz aussagt.

$$A''(f) = 12f^2 - 60f + 58$$
$$A'''(f) = 24f - 60$$

notw. Bed.: $A''(f) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12f^2 - 60f + 58 && | :12 \\ &= f^2 - 5f + \frac{29}{6} \\ f_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - \frac{29}{6}} \\ f_1 &\approx 3.690 \quad \vee \quad f_2 \approx 1.310 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $A''(f) = 0 \quad \wedge \quad A'''(f) \neq 0$

$$A'''(3.690) = 24 \cdot 3.690 - 60 = 28.56 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$A'''(1.310) = 24 \cdot 1.310 - 60 = -28.56 \neq 0 \qquad \checkmark$$

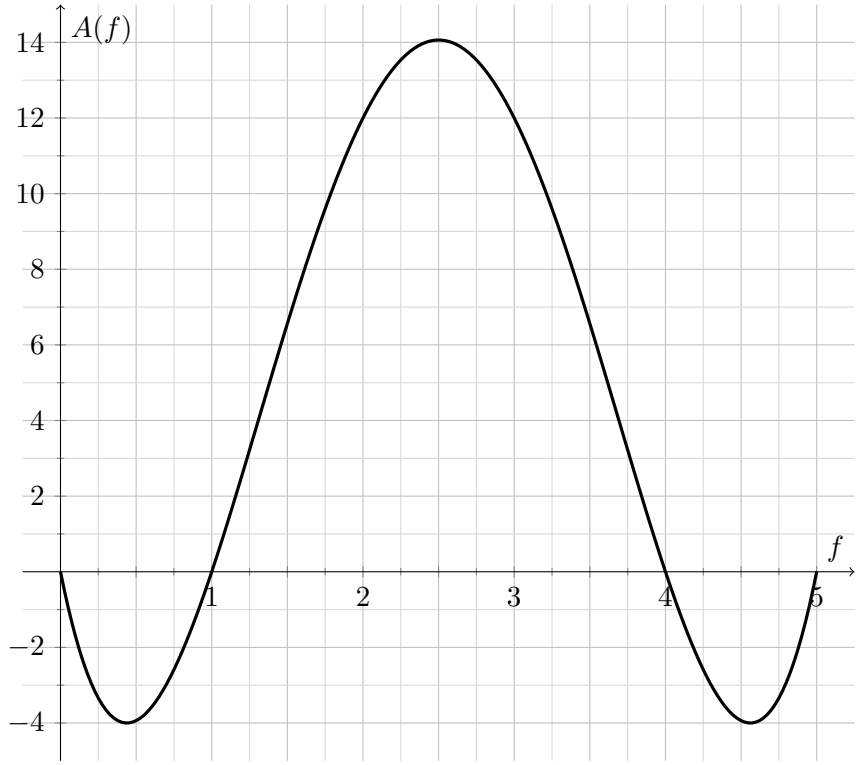
y-Wert: $A(f) = y$

$$A(3.690) \approx 4.031 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(3.69 \mid 4.03)$$
$$A(1.310) \approx 4.031 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(1.31 \mid 4.03)$$

Bei etwa 1.31 kHz und 3.69 kHz wechselt die Krümmung des Graphen. An diesen Stellen ändert sich der Verlauf von „immer steiler“ zu „immer flacher“ oder umgekehrt. Im Sachzusammenhang schaltet dort das Resonanzverhalten um: Die Schwingung ändert sich in der Umgebung dieser Frequenzen am stärksten, schon eine kleine Änderung der Frequenz bewirkt eine deutlich veränderte Schwingungsreaktion des Gehäuses.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Zeichnen Sie $A(f)$.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**