DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ZqW8nw

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x \\ f''(x) &= 12x^2 - 12 \\ f'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 12 && | +12 \\ 12x^2 &= 12 && | :12 \\ x^2 &= 1 && | \sqrt{\ } \\ x_1 = 1 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(1) &= 24 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-1) &= -24 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 2 = -3 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid -3) \\ f(-1) &= (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 2 = -3 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1 \mid -3) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 16$$
$$f'''(x) = 24x$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 16 && | +16 \\ 12x^2 &= 16 && | :12 \\ x^2 &= \frac{4}{3} && | \sqrt{\ } \end{aligned}$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.155 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1.155$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \approx 27.713 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \approx -27.713 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{35}{9} \approx -3.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.15 \mid -3.89)$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{35}{9} \approx -3.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.15 \mid -3.89)$$

c) $f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$

$$f'(x) = 8x^3 + 8x$$
$$f''(x) = 24x^2 + 8$$
$$f'''(x) = 48x$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x^2 + 8 && | -8 \\ 24x^2 &= -8 && | :24 \\ x^2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat keine Lösung, da ein Quadrat nicht negativ sein kann.
$f''(x) = 24x^2 + 8$ ist für alle x positiv, die Funktion besitzt daher keinen Wendepunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = -x^4 + 10x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 20x \\ f''(x) &= -12x^2 + 20 \\ f'''(x) &= -24x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -12x^2 + 20 && | -20 \\ -12x^2 &= -20 && | :(-12) \\ x^2 &= \frac{5}{3} && | \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1.291 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -1.291 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &\approx -30.984 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &\approx 30.984 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &= \frac{134}{9} \approx 14.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.29 \mid 14.89) \\ f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &= \frac{134}{9} \approx 14.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.29 \mid 14.89) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 0.075x^5 - 0.1875x^4 + 0.375x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.375x^4 - 0.75x^3 + 0.75x \\ f''(x) &= 1.5x^3 - 2.25x^2 + 0.75 \\ f'''(x) &= 4.5x^2 - 4.5x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = 1.5x^3 - 2.25x^2 + 0.75 \quad | \, x_1 = 1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \hline & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1.5x^2 - 0.75x - 0.75 \quad | :1.5 \\ &= x^2 - 0.5x - 0.5 \\ x_{2/3} &= 0.25 \pm \sqrt{0.25^2 + 0.5} \\ x_2 = 1 \quad &\vee \quad x_3 = -0.5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(1) &= 4.5 \cdot 1^2 - 4.5 \cdot 1 = 0 \\ f'''(-0.5) &= 4.5 \cdot (-0.5)^2 - 4.5 \cdot (-0.5) = 3.375 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Bei $x = 1$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. $x = 1$ ist eine doppelte Nullstelle von f'', f'' wechselt dort nicht das Vorzeichen. Dort liegt also kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(-0.5) = \frac{51}{640} \approx 0.080 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}(-0.5 \mid 0.08)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x \\ f''(x) &= 0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 \\ f'''(x) &= 1.5x^2 - 4x + 0.5 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = 0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 \quad | \, x_1 = -1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - 2.5x + 3 \quad | :0.5 \\ &= x^2 - 5x + 6 \\ x_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6} \\ x_2 = 3 \quad &\vee \quad x_3 = 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= 1.5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 0.5 = 6 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(3) &= 1.5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 0.5 = 2 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(2) &= 1.5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 0.5 = -1.5 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{49}{40} = 1.225 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_1(-1 \mid 1.23) \\ f(3) &= \frac{333}{40} = 8.325 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_2(3 \mid 8.33) \\ f(2) &= \frac{24}{5} = 4.8 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_3(2 \mid 4.8) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = -\frac{3}{40}x^5 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + 2x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0.375x^4 - 0.25x^3 + 0.75x^2 + 0.75x + 2 \\ f''(x) &= -1.5x^3 - 0.75x^2 + 1.5x + 0.75 \\ f'''(x) &= -4.5x^2 - 1.5x + 1.5 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -1.5x^3 - 0.75x^2 + 1.5x + 0.75 \quad | \, x_1 = -1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
-1		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0

$$\begin{aligned} 0 &= -1.5x^2 + 0.75x + 0.75 \quad | :(-1.5) \\ &= x^2 - 0.5x - 0.5 \\ x_{2/3} &= 0.25 \pm \sqrt{0.25^2 + 0.5} \\ x_2 = 1 \quad &\vee \quad x_3 = -0.5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= -4.5 \cdot (-1)^2 - 1.5 \cdot (-1) + 1.5 = -1.5 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(1) &= -4.5 \cdot 1^2 - 1.5 \cdot 1 + 1.5 = -4.5 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-0.5) &= -4.5 \cdot (-0.5)^2 - 1.5 \cdot (-0.5) + 1.5 = 1.125 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{229}{80} \approx -2.863 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_1(-1 \mid -2.86) \\ f(1) &= \frac{119}{80} \approx 1.488 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_2(1 \mid 1.49) \\ f(-0.5) &= -\frac{1241}{640} \approx -1.939 \quad &&\Rightarrow \mathrm{WP}_3(-0.5 \mid -1.94) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x$$
$$f''(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$$
$$f'''(x) = -3x^2 + 2x + 4$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -x^3 + x^2 + 4x - 4 \quad | \, x_1 = 1$$

	-1	1	4	-4
1		-1	0	4
	-1	0	4	0

$$0 = -x^2 + 4 \quad | \, +x^2$$
$$x^2 = 4 \quad | \, \sqrt{}$$
$$x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = -2$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 3 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = -4 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4 = -12 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = \frac{47}{10} = 4.7 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 4.7)$$
$$f(2) = \frac{46}{15} \approx 3.067 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2 \mid 3.07)$$
$$f(-2) = -\frac{22}{5} = -4.4 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-2 \mid -4.4)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**