DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ZCcdyc

Bestimmen Sie die Variablen mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \text{III} + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & -x_3 = 4 & \mid :(-1) \\ & x_3 = -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & x_2 - 2 \cdot (-4) = -1 & \\ & x_2 + 8 = -1 & \mid -8 \\ & x_2 = -9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 2 \cdot (-9) - 2 \cdot (-4) = 1 & \\ & x_1 - 18 + 8 = 1 & \mid +10 \\ & x_1 = 11 & \end{array}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(11\ ;\ -9\ ;\ -4)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -46 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= -44 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= -79 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 9 & -46 \\ 7 & 4 & 6 & -44 \\ 2 & 9 & 6 & -79 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 5 \cdot \text{II} - 7 \cdot \text{I} \\ 5 \cdot \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 9 & -46 \\ 0 & -15 & -33 & 102 \\ 0 & 35 & 12 & -303 \end{array}\right) \qquad 3 \cdot \text{III} + 7 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 9 & -46 \\ 0 & -15 & -33 & 102 \\ 0 & 0 & -195 & -195 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & -195x_3 = -195 & \mid :(-195) \\ & x_3 = 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & -15x_2 - 33 \cdot 1 = 102 & \\ & -15x_2 - 33 = 102 & \mid +33 \\ & -15x_2 = 135 & \mid :(-15) \\ & x_2 = -9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 5x_1 + 5 \cdot (-9) + 9 \cdot 1 = -46 & \\ & 5x_1 - 45 + 9 = -46 & \mid +36 \\ & 5x_1 = -10 & \mid :5 \\ & x_1 = -2 & \end{array}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(-2\ ;\ -9\ ;\ 1)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c)

$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_3 &= 50 \\ 6x_1 + 6x_2 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -8 & 50 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \quad \text{I} \leftrightarrow \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & -8 & 50 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 6 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 5 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 18 & -12 & 42 \\ 0 & 10 & -18 & 80 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid :6 \\ 9 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -102 & 510 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & -102x_3 = 510 & \mid :(-102) \\ & x_3 = -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & 3x_2 - 2 \cdot (-5) = 7 & \\ & 3x_2 + 10 = 7 & \mid -10 \\ & 3x_2 = -3 & \mid :3 \\ & x_2 = -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) = -6 & \\ & x_1 + 2 - 10 = -6 & \mid +8 \\ & x_1 = 2 & \end{array}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(2\ ;\ -1\ ;\ -5)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d)

$$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -6 \\ -6x_1 + 8x_2 - 8x_3 &= -34 \\ -7x_1 - x_2 + 9x_3 &= 50 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & 2 & -6 \\ -6 & 8 & -8 & -34 \\ -7 & -1 & 9 & 50 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 7 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -22 & -50 \\ 0 & -39 & 22 & 242 \end{array}\right) \quad \text{III} + 39 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -22 & -50 \\ 0 & 0 & -836 & -1708 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -836x_3 = -1708 && | :(-836) \\ & x_3 = \frac{427}{209} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & x_2 - 22 \cdot \frac{427}{209} = -50 \\ & x_2 - \frac{9394}{209} = -50 && | +\frac{9394}{209} \\ & x_2 = -\frac{1056}{209} = -\frac{96}{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -4x_1 + 5 \cdot \left(-\frac{96}{19}\right) + 2 \cdot \frac{427}{209} = -6 \\ & -4x_1 - \frac{5280}{209} + \frac{854}{209} = -6 \\ & -4x_1 - \frac{4426}{209} = -6 && | +\frac{4426}{209} \\ & -4x_1 = \frac{3172}{209} && | :(-4) \\ & x_1 = -\frac{793}{209} \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{793}{209} \ ; \ -\frac{96}{19} \ ; \ \frac{427}{209}\right)\right\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \text{II} - 7 \cdot \text{I} \\ 2 \cdot \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -24 & -25 & 34 \\ 0 & -10 & -3 & 8 \end{array}\right) \quad 12 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -24 & -25 & 34 \\ 0 & 0 & 89 & -74 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 89x_3 = -74 && \mid :89 \\ & x_3 = -\frac{74}{89} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -24x_2 - 25 \cdot \left(-\frac{74}{89}\right) = 34 \\ & -24x_2 + \frac{1850}{89} = 34 && \mid -\frac{1850}{89} \\ & -24x_2 = \frac{1176}{89} && \mid :(-24) \\ & x_2 = -\frac{49}{89} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2x_1 + 4 \cdot \left(-\frac{49}{89}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{74}{89}\right) = -6 \\ & 2x_1 - \frac{196}{89} - \frac{370}{89} = -6 && \mid +\frac{566}{89} \\ & 2x_1 = \frac{32}{89} && \mid :2 \\ & x_1 = \frac{16}{89} \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{16}{89} \; ; \; -\frac{49}{89} \; ; \; -\frac{74}{89}\right)\right\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f)

$$\begin{aligned} -3x_1 + 7x_2 &= -34 \\ 7x_2 + 8x_3 &= -52 \\ 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 52 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 0 & -34 \\ 0 & 7 & 8 & -52 \\ 7 & -5 & -6 & 52 \end{array}\right) \quad \text{I} \leftrightarrow \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -6 & 52 \\ 0 & 7 & 8 & -52 \\ -3 & 7 & 0 & -34 \end{array}\right) \quad 7 \cdot \text{III} + 3 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -6 & 52 \\ 0 & 7 & 8 & -52 \\ 0 & 34 & -18 & -82 \end{array}\right) \quad 7 \cdot \text{III} - 34 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -6 & 52 \\ 0 & 7 & 8 & -52 \\ 0 & 0 & -398 & 1194 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -398x_3 = 1194 && \mid :(-398) \\ & x_3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 7x_2 + 8 \cdot (-3) = -52 \\ & 7x_2 - 24 = -52 && \mid +24 \\ & 7x_2 = -28 && \mid :7 \\ & x_2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 7x_1 - 5 \cdot (-4) - 6 \cdot (-3) = 52 \\ & 7x_1 + 20 + 18 = 52 && \mid -38 \\ & 7x_1 = 14 && \mid :7 \\ & x_1 = 2 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(2\ ;\ -4\ ;\ -3)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g)

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_3 &= -35 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= 58 \\ 7x_1 + 4x_2 &= -16 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 1 & -35 \\ 1 & 2 & -8 & 58 \\ 7 & 4 & 0 & -16 \end{array}\right) \quad \text{I} \leftrightarrow \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 58 \\ 7 & 0 & 1 & -35 \\ 7 & 4 & 0 & -16 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 7 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 7 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 58 \\ 0 & -14 & 57 & -441 \\ 0 & -10 & 56 & -422 \end{array}\right) \quad 7 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 58 \\ 0 & -14 & 57 & -441 \\ 0 & 0 & 107 & -749 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & 107x_3 = -749 & \mid :107 \\ & x_3 = -7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & -14x_2 + 57 \cdot (-7) = -441 & \\ & -14x_2 - 399 = -441 & \mid +399 \\ & -14x_2 = -42 & \mid :(-14) \\ & x_2 = 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 2 \cdot 3 - 8 \cdot (-7) = 58 & \\ & x_1 + 6 + 56 = 58 & \mid -62 \\ & x_1 = -4 & \end{array}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(-4\ ;\ 3\ ;\ -7)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -38 \\ -4x_1 + 9x_3 &= -49 \\ 5x_1 + x_2 &= -31 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 3 & -38 \\ -4 & 0 & 9 & -49 \\ 5 & 1 & 0 & -31 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 7 \cdot \text{II} + 4 \cdot \text{I} \\ 7 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 3 & -38 \\ 0 & 20 & 75 & -495 \\ 0 & -18 & -15 & -27 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid :5 \\ 10 \cdot \text{III} + 9 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 3 & -38 \\ 0 & 4 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 525 & -4725 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & 525x_3 = -4725 & \mid :525 \\ & x_3 = -9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & 4x_2 + 15 \cdot (-9) = -99 & \\ & 4x_2 - 135 = -99 & \mid +135 \\ & 4x_2 = 36 & \mid :4 \\ & x_2 = 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 7x_1 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot (-9) = -38 & \\ & 7x_1 + 45 - 27 = -38 & \mid -18 \\ & 7x_1 = -56 & \mid :7 \\ & x_1 = -8 & \end{array}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(-8\ ;\ 9\ ;\ -9)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i)

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 &= -48 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= -26 \\ -8x_1 + 2x_3 &= -56 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 4 & -48 \\ 9 & 8 & 4 & -26 \\ -8 & 0 & 2 & -56 \end{array}\right) \quad \text{I} \leftrightarrow \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & 4 & 4 & -48 \\ -8 & 0 & 2 & -56 \end{array}\right) \quad 9 \cdot \text{III} + 8 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & 4 & 4 & -48 \\ 0 & 64 & 50 & -712 \end{array}\right) \quad \text{III} - 16 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & 4 & 4 & -48 \\ 0 & 0 & -14 & 56 \end{array}\right)$$

III $-14x_3 = 56 \quad | :(-14)$

$x_3 = -4$

II $4x_2 + 4 \cdot (-4) = -48$

$4x_2 - 16 = -48 \quad | +16$

$4x_2 = -32 \quad | :4$

$x_2 = -8$

I $9x_1 + 8 \cdot (-8) + 4 \cdot (-4) = -26$

$9x_1 - 64 - 16 = -26 \quad | +80$

$9x_1 = 54 \quad | :9$

$x_1 = 6$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(6\ ;\ -8\ ;\ -4)\}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**