DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe Z3yc9N

Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^6 - 7x^3 + 6$.

a) Führen Sie die Substitution $z = x^3$ durch und lösen Sie die entstehende Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= x^6 - 7x^3 + 6 \qquad | \, x^3 = z \\ &= z^2 - 7z + 6 \\ z_{1/2} &= 3.5 \pm \sqrt{3.5^2 - 6} \\ z_1 &= 6 \quad \vee \quad z_2 = 1 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie daraus alle Nullstellen von $h(x)$.

$$\begin{aligned} z_1 = 6 \quad \vee \quad z_2 = 1 \qquad & | \, x = \sqrt[3]{z} \\ x_1 = \sqrt[3]{6} \approx 1.817 \quad \vee \quad x_2 = \sqrt[3]{1} = 1 \end{aligned}$$

c) Erläutern Sie, warum aus den beiden Lösungen der Gleichung in z (bei der Substitution $z = x^3$) nur zwei Nullstellen entstehen – und nicht vier wie oft bei der Substitution $z = x^2$.

Bei x^2 gilt: $x^2 = z$ und auch $(-x)^2 = z$. Deshalb gehören zu einem positiven z-Wert in der Regel zwei reelle Lösungen, nämlich $x = \sqrt{z}$ und $x = -\sqrt{z}$.

Bei x^3 ist das anders: $x^3 = z$, aber $(-x)^3 = -z$. Das bedeutet: Zu einem z-Wert gehört immer nur genau ein passender reeller x-Wert, nämlich $x = \sqrt[3]{z}$.

Darum entstehen hier aus $z_1 = 6$ und $z_2 = 1$ nur zwei reelle Nullstellen und nicht vier.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**