DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe YMccU5

Für ein Modellflugzeug soll ein Schaumkern gefräst werden. Der Kern ist rotationssymmetrisch; aus dem Profil entsteht durch Drehung um die x-Achse die Form. Für die Kalkulation ist die Materialmenge wichtig.
Der Radius in cm wird modelliert durch

$$f(x) = 0.0008x^3 - 0.03x^2 + 0.35x + 1.6 \qquad \text{für } 0 \le x \le 20.$$

Dabei ist x die Längskoordinate entlang des Kerns (in cm).

a) Prüfen Sie, ob der Kern im Modell an irgendeiner Stelle den zulässigen Maximaldurchmesser von 6 cm überschreitet, und begründen Sie, ob das Modell geändert werden muss. Berücksichtigen Sie dabei auch die Randpunkte $x = 0$ und $x = 20$.

Der zulässige Maximaldurchmesser beträgt 6 cm, also darf der Radius höchstens 3 cm betragen.

$$f'(x) = 0.0024x^2 - 0.06x + 0.35$$
$$f''(x) = 0.0048x - 0.06$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.0024x^2 - 0.06x + 0.35 \quad | :0.0024 \\ 0 &= x^2 - 25x + \frac{875}{6} \\ x_{1/2} &= 12.5 \pm \sqrt{12.5^2 - \frac{875}{6}} \\ x_1 &\approx 15.727 \quad \vee \quad x_2 \approx 9.273 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(15.727) &\approx 0.015 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ f''(9.273) &\approx -0.015 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(15.727) &\approx 2.796 \qquad \Rightarrow \text{TP}(15.73 \mid 2.8) \\ f(9.273) &\approx 2.904 \qquad \Rightarrow \text{HP}(9.27 \mid 2.9) \end{aligned}$$

Randpunkte:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1.6 \\ f(20) &= 0.0008 \cdot 20^3 - 0.03 \cdot 20^2 + 0.35 \cdot 20 + 1.6 = 3 \end{aligned}$$

Der größte Radius beträgt also 3 cm (bei $x = 20$), der größte Durchmesser damit $2 \cdot 3 = 6$ cm. Der Maximaldurchmesser wird nicht überschritten, sondern an der Stelle $x = 20$ genau erreicht. Das Modell muss daher nicht geändert werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Der Hersteller will wissen, wie viel Material pro Kern benötigt wird. Ermitteln Sie das Volumen des Kerns in cm^3.

Nebenrechnung: $(0.0008x^3 - 0.03x^2 + 0.35x + 1.6)^2$

$$\begin{aligned}
&= (0.0008x^3 - 0.03x^2 + 0.35x + 1.6)(0.0008x^3 - 0.03x^2 + 0.35x + 1.6) \\
&= 0.00000064x^6 - 0.000024x^5 + 0.00028x^4 + 0.00128x^3 \\
&\quad - 0.000024x^5 + 0.0009x^4 - 0.0105x^3 - 0.048x^2 \\
&\quad + 0.00028x^4 - 0.0105x^3 + 0.1225x^2 + 0.56x \\
&\quad + 0.00128x^3 - 0.048x^2 + 0.56x + 2.56 \\
&= 0.00000064x^6 - 0.000048x^5 + 0.00146x^4 - 0.01844x^3 \\
&\quad + 0.0265x^2 + 1.12x + 2.56
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{20} (0.0008x^3 - 0.03x^2 + 0.35x + 1.6)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^{20} (0.00000064x^6 - 0.000048x^5 + 0.00146x^4 - 0.01844x^3 \\
&\quad + 0.0265x^2 + 1.12x + 2.56) \, dx \\
&= \pi \Big[\frac{1}{10937500} x^7 - 0.000008x^6 + 0.000292x^5 - 0.00461x^4 \\
&\quad + \frac{53}{6000} x^3 + 0.56x^2 + 2.56x \Big]_0^{20} \\
&= \pi \Big(\frac{1}{10937500} \cdot 20^7 - 0.000008 \cdot 20^6 + 0.000292 \cdot 20^5 - 0.00461 \cdot 20^4 \\
&\quad + \frac{53}{6000} \cdot 20^3 + 0.56 \cdot 20^2 + 2.56 \cdot 20 - 0 \Big) \\
&= \pi \left(\frac{4096}{35} - 512 + 934.4 - 737.6 + \frac{212}{3} + 224 + 51.2 \right) \\
&= \frac{15508}{105} \pi \approx 463.998
\end{aligned}$$

Das Volumen des Kerns beträgt ungefähr $463.998\,\mathrm{cm}^3$.

c) Berechnen Sie das Gesamtgewicht des Bauteils, um beurteilen zu können, ob es für den geplanten Einsatz geeignet ist. Für das Bauteil wird XPS (extrudierter Polystyrol-Hartschaum) mit einer Dichte von $\rho = 0.05\,\mathrm{g/cm}^3$ verwendet. Prüfen Sie, ob für dieses Bauteil die Gewichtsvorgabe „maximal 25 g“ eingehalten wird.

$$\begin{aligned}
m &= \rho \cdot V \\
&= 0.05 \, \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 463.998 \, \mathrm{cm}^3 \\
&\approx 23.20 \, \mathrm{g} \leq 25 \, \mathrm{g}
\end{aligned}$$

Das Bauteil hat eine Masse von ungefähr 23.2 g. Damit wird die Gewichtsvorgabe von höchstens 25 g eingehalten. Das Bauteil ist im Modell also für den geplanten Einsatz geeignet.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**