DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe WwK4hF

Bestimmen Sie die Extrempunkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{5}{18}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 1$

$$f'(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{3}x$$
$$f''(x) = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{3}x \\ &= x\left(\frac{5}{6}x - \frac{10}{3}\right) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{6}x - \frac{10}{3} && | + \frac{10}{3} \\ \frac{5}{6}x &= \frac{10}{3} && | : \frac{5}{6} \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - \frac{10}{3} = -\frac{10}{3} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$f''(4) = \frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{10}{3} = \frac{10}{3} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(0) = \frac{5}{18} \cdot 0^3 - \frac{5}{3} \cdot 0^2 - 1 = -1 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0 \mid -1)$$
$$f(4) = \frac{5}{18} \cdot 4^3 - \frac{5}{3} \cdot 4^2 - 1 = -\frac{89}{9} \approx -9.89 \qquad \Rightarrow \text{TP}\left(4 \,\middle|\, -\frac{89}{9}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{9}x$

$$f'(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$$
$$f''(x) = \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{8}{9} \qquad | :\frac{4}{9} \\ &= x^2 - x - 2 \\ x_{1/2} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(2) = \frac{8}{9} \cdot 2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{3} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$f''(-1) = \frac{8}{9} \cdot (-1) - \frac{4}{9} = -\frac{4}{3} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = \frac{4}{27} \cdot 2^3 - \frac{2}{9} \cdot 2^2 - \frac{8}{9} \cdot 2 = -\frac{40}{27} \approx -1.48 \qquad \Rightarrow \text{TP}\left(2 \,\middle|\, -\frac{40}{27}\right)$$
$$f(-1) = \frac{4}{27} \cdot (-1)^3 - \frac{2}{9} \cdot (-1)^2 - \frac{8}{9} \cdot (-1) = \frac{14}{27} \approx 0.52 \qquad \Rightarrow \text{HP}\left(-1 \,\middle|\, \frac{14}{27}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = \frac{2}{33}x^3 + \frac{2}{11}x^2 - \frac{6}{11}x + 3$

$$f'(x) = \frac{2}{11}x^2 + \frac{4}{11}x - \frac{6}{11}$$
$$f''(x) = \frac{4}{11}x + \frac{4}{11}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{11}x^2 + \frac{4}{11}x - \frac{6}{11} \quad | :\frac{2}{11} \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} \\ x_1 = 1 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = \frac{4}{11} \cdot 1 + \frac{4}{11} = \frac{8}{11} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$f''(-3) = \frac{4}{11} \cdot (-3) + \frac{4}{11} = -\frac{8}{11} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = \frac{2}{33} \cdot 1^3 + \frac{2}{11} \cdot 1^2 - \frac{6}{11} \cdot 1 + 3 = \frac{89}{33} \approx 2.7 \qquad \Rightarrow \text{TP}\left(1 \,\middle|\, \frac{89}{33}\right)$$
$$f(-3) = \frac{2}{33} \cdot (-3)^3 + \frac{2}{11} \cdot (-3)^2 - \frac{6}{11} \cdot (-3) + 3 = \frac{51}{11} \approx 4.64 \qquad \Rightarrow \text{HP}\left(-3 \,\middle|\, \frac{51}{11}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x - 2$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{15}{8}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{15}{8} \quad | :\frac{3}{8} \\ &= x^2 - 6x + 5 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \\ x_1 &= 5 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(5) = \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{9}{4} = \frac{3}{2} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$f''(1) = \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{9}{4} = -\frac{3}{2} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(5) = \frac{1}{8} \cdot 5^3 - \frac{9}{8} \cdot 5^2 + \frac{15}{8} \cdot 5 - 2 = -\frac{41}{8} \approx -5.13 \qquad \Rightarrow \text{TP}\left(5 \,\middle|\, -\frac{41}{8}\right)$$
$$f(1) = \frac{1}{8} \cdot 1^3 - \frac{9}{8} \cdot 1^2 + \frac{15}{8} \cdot 1 - 2 = -\frac{9}{8} \approx -1.13 \qquad \Rightarrow \text{HP}\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{8}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = \frac{1}{28}x^4 - \frac{1}{21}x^3 - \frac{3}{7}x^2 + 1$

$$f'(x) = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x$$
$$f''(x) = \frac{3}{7}x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x \\ &= x\left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}\right) \quad | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{6}{7} \qquad | : \frac{1}{7} \\ &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{3}{7} \cdot 0^2 - \frac{2}{7} \cdot 0 - \frac{6}{7} = -\frac{6}{7} < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(3) &= \frac{3}{7} \cdot 3^2 - \frac{2}{7} \cdot 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7} > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2) &= \frac{3}{7} \cdot (-2)^2 - \frac{2}{7} \cdot (-2) - \frac{6}{7} = \frac{10}{7} > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{28} \cdot 0^4 - \frac{1}{21} \cdot 0^3 - \frac{3}{7} \cdot 0^2 + 1 = 1 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 1) \\ f(3) &= \frac{1}{28} \cdot 3^4 - \frac{1}{21} \cdot 3^3 - \frac{3}{7} \cdot 3^2 + 1 = -\frac{5}{4} = -1.25 && \Rightarrow \text{TP}_1(3 \mid -1.25) \\ f(-2) &= \frac{1}{28} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{21} \cdot (-2)^3 - \frac{3}{7} \cdot (-2)^2 + 1 = \frac{5}{21} \approx 0.24 && \Rightarrow \text{TP}_2\left(-2 \,\middle|\, \frac{5}{21}\right) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 6x^3 + 32x + 3$

$$f'(x) = 2x^4 - 18x^2 + 32$$
$$f''(x) = 8x^3 - 36x$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^4 - 18x^2 + 32 && | :2 \\
&= x^4 - 9x^2 + 16 && | x^2 = z \\
&= z^2 - 9z + 16 \\
z_{1/2} &= 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 16} \\
z_1 \approx 6.562 \quad &\vee \quad z_2 \approx 2.438 && | x = \sqrt{z} \\
x_1 \approx 2.562 \quad &\vee \quad x_2 \approx -2.562 \quad \vee \quad x_3 \approx 1.562 \quad \vee \quad x_4 \approx -1.562
\end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f''(2.562) &= 8 \cdot 2.562^3 - 36 \cdot 2.562 \approx 42.301 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\
f''(-2.562) &= 8 \cdot (-2.562)^3 - 36 \cdot (-2.562) \approx -42.301 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\
f''(1.562) &= 8 \cdot 1.562^3 - 36 \cdot 1.562 \approx -25.744 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\
f''(-1.562) &= 8 \cdot (-1.562)^3 - 36 \cdot (-1.562) \approx 25.744 > 0 && \Rightarrow \text{TP}
\end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
f(2.562) &= \frac{2}{5} \cdot 2.562^5 - 6 \cdot 2.562^3 + 32 \cdot 2.562 + 3 \\
&\approx 28.237 \quad \Rightarrow \text{TP}_1(2.56 \mid 28.24) \\
f(-2.562) &= \frac{2}{5} \cdot (-2.562)^5 - 6 \cdot (-2.562)^3 + 32 \cdot (-2.562) + 3 \\
&\approx -22.237 \quad \Rightarrow \text{HP}_1(-2.56 \mid -22.24) \\
f(1.562) &= \frac{2}{5} \cdot 1.562^5 - 6 \cdot 1.562^3 + 32 \cdot 1.562 + 3 \\
&\approx 33.837 \quad \Rightarrow \text{HP}_2(1.56 \mid 33.84) \\
f(-1.562) &= \frac{2}{5} \cdot (-1.562)^5 - 6 \cdot (-1.562)^3 + 32 \cdot (-1.562) + 3 \\
&\approx -27.837 \quad \Rightarrow \text{TP}_2(-1.56 \mid -27.84)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**