DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe WpWtRD

In einem großen Schauaquarium wird nachts automatisch nachgeheizt. Entscheidend ist nicht die Temperatur selbst, sondern die Differenz $D(x)$ zwischen Wasser- und Solltemperatur (in °C).

- $D(x) > 0$: Wasser ist zu warm
- $D(x) < 0$: Wasser ist zu kalt
- $D(x) = 0$: Solltemperatur erreicht

Für die Nacht gilt: $D(x) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{37}{80}x - \frac{51}{160}$ mit x in Stunden nach 22:00 Uhr und $0 \le x \le 9$.

a) Geben Sie die Uhrzeit an, zu der die Solltemperatur das erste Mal erreicht wird.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{80}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{37}{80}x - \frac{51}{160} && | \cdot 160 \\ &= 2x^3 - 25x^2 + 74x - 51 && | \, x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -25 & 74 & -51 \\ 1 & & 2 & -23 & 51 \\ \hline & 2 & -23 & 51 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 23x + 51 && | :2 \\ &= x^2 - 11.5x + 25.5 \\ x_{2/3} &= 5.75 \pm \sqrt{5.75^2 - 25.5} \\ x_2 &= 8.5 \quad \vee \quad x_3 = 3 \end{aligned}$$

Der erste Zeitpunkt ist $x_1 = 1$. Die Solltemperatur wird also erstmals um 23:00 Uhr erreicht.

b) Gibt es im betrachteten Zeitraum weitere Zeitpunkte mit $D(x) = 0$? Was bedeutet das für die Funktionsweise der Heizungsanlage?

Ja. Aus a) liegen alle drei Nullstellen $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ und $x_2 = 8.5$ im Intervall $0 \le x \le 9$. Die Solltemperatur wird also zu folgenden Uhrzeiten erreicht:

23:00 Uhr, 01:00 Uhr, 06:30 Uhr

Das bedeutet für die Heizungsanlage: Die Temperatur wird nicht nur einmal erreicht und dann gehalten, sondern die Anlage scheint schubweise zu wärmen. Die Wassertemperatur unterliegt also Schwankungen und pendelt mehrmals um die Solltemperatur herum.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Für das Überleben der Fische ist es wichtig, dass die Temperatur nicht mehr als 0.5 °C von der Solltemperatur abweicht. Falls dies nicht eingehalten wird, muss ein Techniker bestellt und die Anlage neu justiert werden. Braucht es einen Techniker?

Zur Prüfung der maximalen Abweichung werden die Extrempunkte von $D(x)$ sowie die Randpunkte des Intervalls betrachtet.

$$D'(x) = \frac{3}{80}x^2 - \frac{5}{16}x + \frac{37}{80}$$
$$D''(x) = \frac{3}{40}x - \frac{5}{16}$$

notw. Bed.: $D'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{80}x^2 - \frac{5}{16}x + \frac{37}{80} && \mid \cdot 80 \\ &= 3x^2 - 25x + 37 && \mid :3 \\ &= x^2 - \frac{25}{3}x + \frac{37}{3} \end{aligned}$$
$$x_{1/2} = \frac{25}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)^2 - \frac{37}{3}}$$
$$x_1 \approx 6.409 \quad \vee \quad x_2 \approx 1.924$$

hinr. Bed.: $D'(x) = 0 \quad \wedge \quad D''(x) \neq 0$

$$D''(6.409) = \frac{3}{40} \cdot 6.409 - \frac{5}{16} \approx 0.168 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$D''(1.924) = \frac{3}{40} \cdot 1.924 - \frac{5}{16} \approx -0.168 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $D(x) = y$

$$\begin{aligned} D(6.409) &\approx -0.482 && \Rightarrow \text{TP}(6.41 \mid -0.48) \\ D(1.924) &\approx 0.082 && \Rightarrow \text{HP}(1.92 \mid 0.08) \\ D(0) &= -\frac{51}{160} \approx -0.319 && \Rightarrow \text{Randpunkt } P(0 \mid -0.32) \\ D(9) &= 0.3 && \Rightarrow \text{Randpunkt } Q(9 \mid 0.3) \end{aligned}$$

Die größte positive Abweichung beträgt etwa 0.3 °C (am Ende des Zeitraums um 07:00 Uhr), die größte negative Abweichung etwa −0.48 °C (beim Tiefpunkt). Da alle Werte betragsmäßig kleiner als 0.5 °C sind, wird die zulässige Abweichung eingehalten.

Es wird also kein Techniker benötigt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**