DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe WSH6Hf

Gegeben ist eine Funktion dritten Grades ohne absolutes Glied: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.
Für drei Stellen sind die Tangentensteigungen (lokalen Änderungsraten) bekannt:

- an der Stelle $x = 0$ gilt: $f'(0) = 4$
- an der Stelle $x = 1$ gilt: $f'(1) = 1$
- an der Stelle $x = 2$ gilt: $f'(2) = 4$

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ zunächst die Ableitung $f'(x)$ allgemein (also in Abhängigkeit von a, b und c).

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) - (ax^3 + bx^2 + cx)}{h} \\
&= \frac{a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + b(x^2 + 2xh + h^2) + cx + ch - ax^3 - bx^2 - cx}{h} \\
&= \frac{ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch - ax^3 - bx^2 - cx}{h} \\
&= \frac{3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + 2bxh + bh^2 + ch}{h} \\
&= \frac{h(3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c)}{h} \\
&= 3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} (3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c) \\
&= 3ax^2 + 2bx + c
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Nutzen Sie anschließend die drei Angaben zu $f'(0)$, $f'(1)$ und $f'(2)$, um ein Gleichungssystem für a, b und c aufzustellen und zu lösen.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{aligned}
f'(0) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \quad &= c \\
f'(1) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \quad &= 3a + 2b + c \\
f'(2) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \quad &= 12a + 4b + c
\end{aligned}$$

Aus $f'(0) = 4$ folgt direkt $c = 4$. Eingesetzt in die beiden anderen Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 3a + 2b + 4 = 1 && | -4 \\
& 3a + 2b = -3 \\
\text{II} \quad & 12a + 4b + 4 = 4 && | -4 \\
& 12a + 4b = 0 && | :4 \\
\text{II}' \quad & 3a + b = 0 && | -3a \\
\text{II}'' \quad & b = -3a \\
\text{II}'' \text{ in I} \quad & 3a + 2 \cdot (-3a) = -3 && | \text{ zusammenfassen} \\
& -3a = -3 && | :(-3) \\
& a = 1 \\
a \text{ in II}'' \quad & b = -3 \cdot 1 = -3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = -3, \quad c = 4$$

c) Notieren Sie die Funktionsgleichung $f(x)$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**