DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe WKchnL

In einem Industriepark wird für eine Besucherplattform ein geschwungener Aussichtssteg geplant, der über ein begrüntes Regenrückhaltebecken führt. Die Konstruktion soll ohne zusätzliche Stützen auskommen und an beiden Enden barrierefrei an bestehende Wege anschließen. Damit die Statik, die Entwässerung und die Sicherheit (z. B. Rutschgefahr) geprüft werden können, wird das Höhenprofil des Stegs entlang der Laufrichtung modelliert.
Dazu beschreibt die Funktion $h(x)$ die Höhe des Stegs über dem Boden in Metern. Dabei ist x die horizontale Entfernung vom Startpunkt in Metern. Der betrachtete Abschnitt reicht vom Beginn des Stegs bis zum Ende der Plattform. Für die weitere Planung sind insbesondere die Nullstellen (Anschlusshöhen an den Wegen), Extrempunkte (höchste und tiefste Stellen) sowie Wendepunkte (Übergänge, an denen sich die Krümmung des Profils verändert und das Gefälle „anders wirkt“) relevant.
Als Modellfunktion wird verwendet:

$$h(x) = 0.0001x^4 - 0.0288x^2 + 2.0736 \qquad (-12 \le x \le 12)$$

Beziehen Sie sich auf die Aussichtsplattform in der Situationsbeschreibung.

a) Bestimmen Sie die Gesamtbreite der Plattform.

Die Gesamtbreite ergibt sich aus den Nullstellen der Funktion.

$$\begin{aligned}
h(x) &= 0 \\
0 &= 0.0001x^4 - 0.0288x^2 + 2.0736 && | :0.0001 \\
&= x^4 - 288x^2 + 20736 && | \, x^2 = z \\
&= z^2 - 288z + 20736 \\
z_{1/2} &= 144 \pm \sqrt{144^2 - 20736} \\
&= 144 \pm \sqrt{0} \\
z &= 144 && | \, x = \sqrt{z} \\
x_1 &= 12 \quad \vee \quad x_2 = -12
\end{aligned}$$

Die Plattform beginnt also bei $x = -12$ und endet bei $x = 12$.

$$\text{Breite} = 12 - (-12) = 24$$

Die Gesamtbreite der Plattform beträgt 24 m.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Beurteilen Sie, ob ein durchschnittlich großer Mensch an der höchsten Stelle unter der Plattform hindurchlaufen kann.

Da h nur gerade Exponenten hat, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse. Der höchste Punkt der Plattform wird über die Extrempunkte bestimmt.

$$h'(x) = 0.0004x^3 - 0.0576x$$
$$h''(x) = 0.0012x^2 - 0.0576$$

notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.0004x^3 - 0.0576x \\ &= x(0.0004x^2 - 0.0576) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.0004x^2 - 0.0576 \quad | \, +0.0576 \\ 0.0004x^2 &= 0.0576 \quad | \, :0.0004 \\ x^2 &= 144 \quad | \, \sqrt{} \\ x_2 = 12 \quad &\vee \quad x_3 = -12 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= -0.0576 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ h''(12) &= 0.0012 \cdot 12^2 - 0.0576 = 0.1152 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ h''(-12) &= 0.0012 \cdot (-12)^2 - 0.0576 = 0.1152 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$h(0) = 2.0736 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 2.07)$$

Die Tiefpunkte sind die Nullstellen $(\pm 12 \mid 0)$ aus a). Die Plattform ist an der höchsten Stelle etwa 2.07 m hoch. Ein durchschnittlich großer Mensch kann also unter der Plattform hindurchlaufen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Bestimmen Sie die maximale Steigung in Grad, die beim Begehen bzw. Verlassen der Plattform überwunden werden muss.

Die maximale Steigung liegt dort, wo $h'(x)$ ihren größten bzw. kleinsten Wert annimmt, also in den Wendepunkten.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0.0004x^3 - 0.0576x \\ h''(x) &= 0.0012x^2 - 0.0576 \\ h'''(x) &= 0.0024x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.0012x^2 - 0.0576 && | +0.0576 \\ 0.0012x^2 &= 0.0576 && | :0.0012 \\ x^2 &= 48 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{48} \approx 6.928 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{48} \approx -6.928 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h'''(\sqrt{48}) &\approx 0.017 \neq 0 \qquad \checkmark \\ h'''(-\sqrt{48}) &\approx -0.017 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Steigung an diesen Stellen:

$$\begin{aligned} h'(\sqrt{48}) &\approx -0.266 \\ h'(-\sqrt{48}) &\approx 0.266 \end{aligned}$$

An den Enden der Plattform ist $h'(\pm 12) = 0$. Die Steigung ist auf der Plattform also betragsmäßig an den Wendestellen am größten.

$$\alpha = \tan^{-1}(0.266) \approx 14.896^\circ$$

Die maximale Steigung beträgt etwa 14.9°.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**