DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe UykPPL

Bestimmen Sie jeweils den Wert des Integrals

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

im angegebenen Intervall. Beachten Sie, dass negative Beiträge möglich sind und sich Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gegenseitig aufheben können.

a) $f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad$ Intervall: $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 3x - (x^2 - 1) \\ &= x^3 - 3x - x^2 + 1 \\ &= x^3 - x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} (x^3 - x^2 - 3x + 1)\,dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - 2\right) \\ &= 4 - \frac{8}{3} - 6 + 2 - \left(4 + \frac{8}{3} - 6 - 2\right) \\ &= -\frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{4}{3} \approx -1.333 \end{aligned}$$

b) $f(x) = -x^3 + 4x, \quad g(x) = x^2, \quad$ Intervall: $[0; 2]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^3 + 4x - x^2 \\ &= -x^3 - x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{2} (-x^3 - x^2 + 4x)\,dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 0 \\ &= -4 - \frac{8}{3} + 8 \\ &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = 0.5x^3 - 2x, \quad g(x) = -0.5x^2 + x, \quad$ Intervall: $[-1; 3]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0.5x^3 - 2x - (-0.5x^2 + x) \\ &= 0.5x^3 - 2x + 0.5x^2 - x \\ &= 0.5x^3 + 0.5x^2 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} (0.5x^3 + 0.5x^2 - 3x)\,dx &= \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 3^4 + \frac{1}{6} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{8} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right) \\ &= \frac{81}{8} + \frac{9}{2} - \frac{27}{2} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{9}{8} - \left(-\frac{37}{24}\right) \\ &= \frac{8}{3} \approx 2.667 \end{aligned}$$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x, \quad g(x) = -x^2 - x, \quad$ Intervall: $[-1; 2]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 2x^2 - x - (-x^2 - x) \\ &= x^3 - 2x^2 - x + x^2 + x \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2)\,dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right) \\ &= 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -0.5x^3 + 3x, \quad g(x) = x^2 - 2, \quad$ Intervall: $[0; 3]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.5x^3 + 3x - (x^2 - 2) \\ &= -0.5x^3 + 3x - x^2 + 2 \\ &= -0.5x^3 - x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 (-0.5x^3 - x^2 + 3x + 2)\,dx &= \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^3 \\ &= -\frac{1}{8} \cdot 3^4 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 0 \\ &= -\frac{81}{8} - 9 + \frac{27}{2} + 6 \\ &= \frac{3}{8} = 0.375 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**