DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe U5HrgX

In einer Verpackungsmaschine werden Kartonlaschen mit einer Andruckrolle auf eine Klebenaht gepresst, damit die Schachtel zuverlässig schließt. Entlang einer kurzen Pressstrecke kann der Druck schwanken (z. B. durch Rollenunwucht, Materialtoleranzen oder leicht wechselnde Bandspannung).
Der Anpressdruck $p(x)$ (in N/cm^2) entlang der Strecke x (in cm) wird auf dem Intervall $[0;10]$ modelliert durch:

$$p(x) = -0.06x^3 + 0.9x^2 - 3x + 8$$

a) Für die Klebenaht ist entscheidend, wie „stabil“ der Druck über die Strecke ist. Bestimmen Sie den mittleren Anpressdruck auf $[0;10]$ und deuten Sie ihn als „gleichmäßigen Ersatzdruck“.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10}(-0.06x^3 + 0.9x^2 - 3x + 8)\,dx \\ &= \frac{1}{10}\Big[-0.015x^4 + 0.3x^3 - 1.5x^2 + 8x\Big]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10}\Big(-0.015\cdot 10^4 + 0.3\cdot 10^3 - 1.5\cdot 10^2 + 8\cdot 10 - 0\Big) \\ &= \frac{1}{10}\cdot 80 = 8 \end{aligned}$$

Der mittlere Anpressdruck beträgt also 8 N/cm^2. Das bedeutet: Über die gesamte Pressstrecke wirkt der Druck im Mittel so, als läge überall ein gleichmäßiger Ersatzdruck von 8 N/cm^2 an.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Der Druck darf aus Qualitätsgründen nie unter 6 N/cm^2 fallen und nie über 11 N/cm^2 steigen. Prüfen Sie mit dem Modell, ob beide Grenzwerte im gesamten Intervall eingehalten werden.

$$p'(x) = -0.18x^2 + 1.8x - 3$$
$$p''(x) = -0.36x + 1.8$$

notw. Bed.: $p'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.18x^2 + 1.8x - 3 && | :(-0.18) \\ &= x^2 - 10x + \frac{50}{3} \\ x_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - \frac{50}{3}} \\ x_1 &\approx 7.887 \quad \vee \quad x_2 \approx 2.113 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(x) = 0 \quad \wedge \quad p''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} p''(7.887) &= -0.36 \cdot 7.887 + 1.8 \approx -1.039 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ p''(2.113) &= -0.36 \cdot 2.113 + 1.8 \approx 1.039 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$\begin{aligned} p(7.887) &\approx 10.887 && \Rightarrow \text{HP}(7.89 \mid 10.89) \\ p(2.113) &\approx 5.113 && \Rightarrow \text{TP}(2.11 \mid 5.11) \end{aligned}$$

Zusätzlich werden die Randwerte betrachtet:

$$\begin{aligned} p(0) &= 8 \\ p(10) &= -0.06 \cdot 10^3 + 0.9 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 8 = 8 \end{aligned}$$

Der kleinste Wert im Intervall ist also etwa 5.11 N/cm^2, der größte Wert etwa 10.89 N/cm^2. Damit wird der obere Grenzwert von 11 N/cm^2 eingehalten, der untere Grenzwert von 6 N/cm^2 aber unterschritten.

c) Als Zusatzkriterium der Instandhaltung gilt: Der maximale Druck darf höchstens 25 % über dem Mittelwert liegen. Prüfen Sie, ob diese Vorgabe erfüllt ist. Falls nicht: Entscheiden Sie, ob eine Anpassung des Anpresssystems sinnvoll ist, und begründen Sie kurz.

Der Mittelwert beträgt 8 N/cm^2, der maximale Druck etwa 10.887 N/cm^2.

$$\frac{10.887 - 8}{8} \approx 0.3609 = 36.09\,\%$$

Der maximale Druck liegt also um etwa 36.09 % über dem Mittelwert. Damit ist die Vorgabe von höchstens 25 % nicht erfüllt.

Eine Anpassung des Anpresssystems ist sinnvoll, da der Druckverlauf insgesamt zu stark schwankt. Außerdem wird in Teilaufgabe b) auch der Mindestwert von 6 N/cm^2 unterschritten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Für eine Stichprobe soll der Druck an der Position $x = 4$ cm dokumentiert werden. Bestimmen Sie den Modellwert und ordnen Sie ihn in Bezug auf die Grenzwerte ein.

$$p(4) = -0.06 \cdot 4^3 + 0.9 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 8 = 6.56$$

Der Druck an der Stelle $x = 4$ cm beträgt also 6.56 N/cm^2. Dieser Wert liegt über 6 N/cm^2 und unter 11 N/cm^2 und damit innerhalb der zulässigen Grenzwerte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**