DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe TvY5Wj

Berechnen Sie den Mittelwert m und entscheiden Sie jeweils, ob m näher an $f(a)$, $f(b)$ oder $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ liegt.

a) $f(x) = x^2$ Intervall $[0;3]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 0\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 9 = 3 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$
$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f(1.5) = 1.5^2 = 2.25$$

Damit liegt $m = 3$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(1.5) = 2.25$.

b) $f(x) = -2x + 6$ Intervall $[1;5]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{5-1}\int_1^5 (-2x+6)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[-x^2 + 6x\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\left(-5^2 + 6\cdot 5 - \left(-1^2 + 6\cdot 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}(5-5) = 0 \end{aligned}$$

$$f(1) = -2\cdot 1 + 6 = 4$$
$$f(5) = -2\cdot 5 + 6 = -4$$
$$f(3) = -2\cdot 3 + 6 = 0$$

Damit liegt $m = 0$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(3) = 0$ (sogar gleich).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^3 - 3x$ Intervall $[-2; 0.5]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{0.5-(-2)} \int_{-2}^{0.5} (x^3 - 3x)\, dx \\ &= \frac{1}{2.5} \left[0.25x^4 - 1.5x^2\right]_{-2}^{0.5} \\ &= 0.4 \left(0.25 \cdot 0.5^4 - 1.5 \cdot 0.5^2 - \left(0.25 \cdot (-2)^4 - 1.5 \cdot (-2)^2\right)\right) \\ &= 0.4 \left(-\frac{23}{64} - (-2)\right) \\ &= \frac{21}{32} \approx 0.656 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2 \\ f(0.5) &= 0.5^3 - 3 \cdot 0.5 = -1.375 \\ f(-0.75) &= (-0.75)^3 - 3 \cdot (-0.75) \approx 1.828 \end{aligned}$$

Damit liegt $m \approx 0.656$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(-0.75) \approx 1.828$.

d) $f(x) = 0.2x^3 + x$ Intervall $[-1; 2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^{2} (0.2x^3 + x)\, dx \\ &= \frac{1}{3} \left[0.05x^4 + 0.5x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(0.05 \cdot 2^4 + 0.5 \cdot 2^2 - \left(0.05 \cdot (-1)^4 + 0.5 \cdot (-1)^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{3} (2.8 - 0.55) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2.25 = 0.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0.2 \cdot (-1)^3 + (-1) = -1.2 \\ f(2) &= 0.2 \cdot 2^3 + 2 = 3.6 \\ f(0.5) &= 0.2 \cdot 0.5^3 + 0.5 = 0.525 \end{aligned}$$

Damit liegt $m = 0.75$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0.5) = 0.525$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -x^2 + 2$ Intervall $[-1; 1]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} - \left(-\frac{5}{3} \right) \right) \\ &= \frac{5}{3} \approx 1.667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^2 + 2 = 1 \\ f(1) &= -1^2 + 2 = 1 \\ f(0) &= -0^2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Damit liegt $m \approx 1.667$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0) = 2$.

f) $f(x) = 0.5x^4 - x^2$ Intervall $[0; 2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-0} \int_{0}^{2} (0.5x^4 - x^2)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \cdot 2^5 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} \\ &= \frac{4}{15} \approx 0.267 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0.5 \cdot 0^4 - 0^2 = 0 \\ f(2) &= 0.5 \cdot 2^4 - 2^2 = 4 \\ f(1) &= 0.5 \cdot 1^4 - 1^2 = -0.5 \end{aligned}$$

Damit liegt $m \approx 0.267$ näher an $f(a) = f(0) = 0$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 (x^2 - 4x + 5)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4^2 + 5\cdot 4 - 0\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{3} \\ &= \frac{7}{3} \approx 2.333 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0^2 - 4\cdot 0 + 5 = 5$$
$$f(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 5 = 5$$
$$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 5 = 1$$

Damit liegt $m \approx 2.333$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(2) = 1$.

h) $f(x) = -0.5x^3 + 2x$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 (-0.5x^3 + 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{8}x^4 + x^2\right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\cdot 2^4 + 2^2 - \left(-\frac{1}{8}\cdot(-2)^4 + (-2)^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}(2-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$f(-2) = -0.5\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2) = 0$$
$$f(2) = -0.5\cdot 2^3 + 2\cdot 2 = 0$$
$$f(0) = -0.5\cdot 0^3 + 2\cdot 0 = 0$$

Damit stimmt $m = 0$ mit $f(a)$, $f(b)$ und $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ überein.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = 0.1x^4 - 0.8x^2 + 1$ Intervall $[-1; 3]$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{3-(-1)} \int_{-1}^{3} (0.1x^4 - 0.8x^2 + 1)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{50}x^5 - \frac{4}{15}x^3 + x \right]_{-1}^{3} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{50} \cdot 3^5 - \frac{4}{15} \cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{50} \cdot (-1)^5 - \frac{4}{15} \cdot (-1)^3 + (-1) \right) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{33}{50} - \left(-\frac{113}{150} \right) \right) \\
&= \frac{53}{150} \approx 0.353
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= 0.1 \cdot (-1)^4 - 0.8 \cdot (-1)^2 + 1 = 0.3 \\
f(3) &= 0.1 \cdot 3^4 - 0.8 \cdot 3^2 + 1 = 1.9 \\
f(1) &= 0.1 \cdot 1^4 - 0.8 \cdot 1^2 + 1 = 0.3
\end{aligned}
$$

Damit liegt $m \approx 0.353$ näher an $f(a) = f(-1) = 0.3$ und an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(1) = 0.3$ (beide gleich weit entfernt).

j) $f(x) = \sin(x) + 1$ Intervall $[0; \pi]$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{\pi - 0} \int_{0}^{\pi} (\sin(x) + 1)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x) + x \right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\cos(\pi) + \pi - (-\cos(0) + 0) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(1 + \pi - (-1) \right) \\
&= \frac{2 + \pi}{\pi} \approx 1.637
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \sin(0) + 1 = 1 \\
f(\pi) &= \sin(\pi) + 1 = 1 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2
\end{aligned}
$$

Damit liegt $m \approx 1.637$ näher an $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**