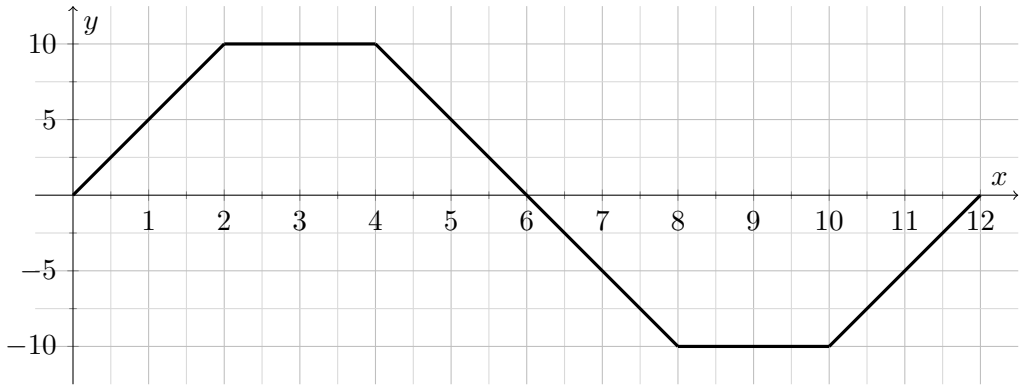
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe TrXKFY

Am 26.11.1966 wurde an der Mündung des Flusses Rance bei Saint-Malo in Frankreich ein technisches Pionierprojekt eröffnet: das erste Gezeitenkraftwerk der Welt. Es nutzt den regelmäßigen Wechsel von Ebbe und Flut. Bei Flut strömt Meerwasser in ein großes Speicherbecken, bei Ebbe fließt es wieder zurück ins Meer. Dabei wird das Wasser jeweils durch Turbinen geleitet, die die Strömungsenergie in elektrische Energie umwandeln.
Das Schaubild stellt diesen Vorgang vereinfacht dar und zeigt die Zuflussrate d des Meerwassers in den Speicher in Abhängigkeit von der Zeit (x-Achse: Zeit in Stunden; y-Achse: Zufluss in Mio. m^3/h).



Damit das Modell rechnerisch gut bearbeitet werden kann, wird der reale Verlauf hier bewusst vereinfacht dargestellt: In Wirklichkeit würde die Zuflussrate während Ebbe und Flut nicht „zackig“ wechseln, sondern eher gleichmäßig an- und absteigen. Anschaulich erinnert dieser natürliche Verlauf an eine wellenförmige Kurve, etwa wie bei einer Sinusfunktion.
Um dennoch einen praktikablen Kompromiss zwischen Realität und Lösbarkeit zu erhalten, kann die Zuflussrate des obigen Sachkontextes modellhaft durch die folgende Funktion beschrieben werden:

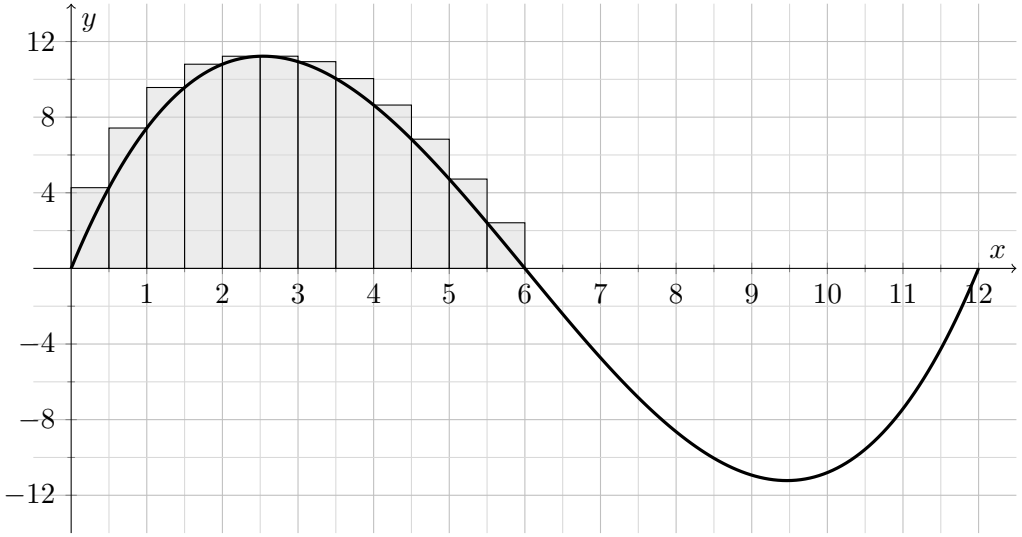
$$f(x) = 0.135x^3 - 2.43x^2 + 9.72x$$

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zum Gezeitenkraftwerk.

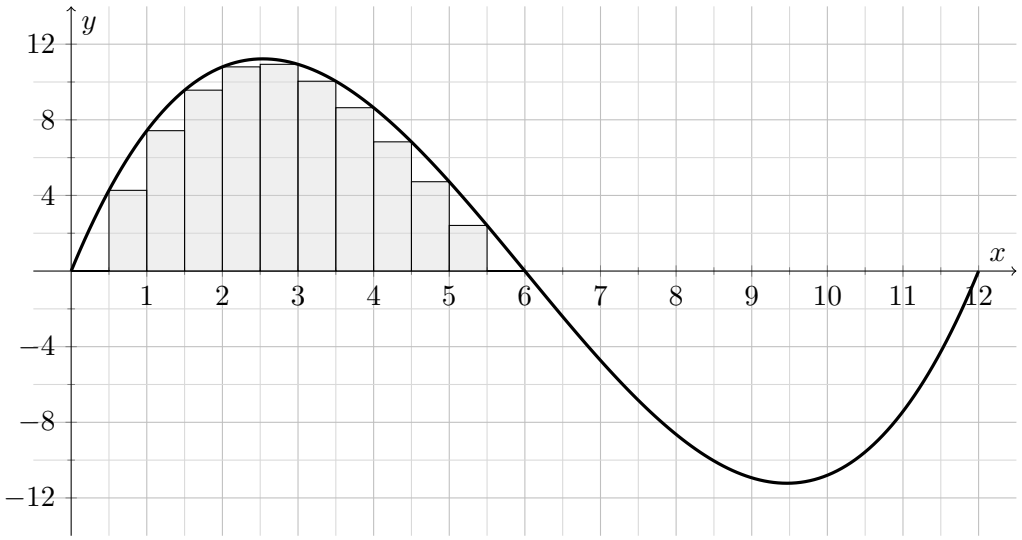
a) Tragen Sie zunächst in die Schaubilder (siehe nächste Seite) für die Zuflussrate zur neuen Modellfunktion $f(x) = 0.135x^3 - 2.43x^2 + 9.72x$ die Rechtecke der Ober- und Untersumme im Zeitraum $0 \leq x \leq 6$ ein.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Obersumme:



Untersumme:



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Berechnen Sie danach die Flächen der einzelnen Rechtecke (Teilsummen) und daraus jeweils die gesamte Ober- bzw. Untersumme.

Der Graph von f steigt im Zeitraum $0 \leq x \leq 6$ bis zum Hochpunkt bei $x \approx 2.536$ (siehe Teilaufgabe d)) und fällt danach. Im Intervall $[2.5; 3]$ liegt der Hochpunkt, dort ist $f(2.536)$ der größte Funktionswert.

Obersumme:

$$\begin{aligned}
r_{O1} &= f(0.5) \cdot 0.5 && \approx 4.269 \cdot 0.5 && \approx 2.135 \\
r_{O2} &= f(1) \cdot 0.5 && = 7.425 \cdot 0.5 && \approx 3.713 \\
r_{O3} &= f(1.5) \cdot 0.5 && \approx 9.568 \cdot 0.5 && \approx 4.784 \\
r_{O4} &= f(2) \cdot 0.5 && = 10.8 \cdot 0.5 && = 5.4 \\
r_{O5} &= f(2.5) \cdot 0.5 && \approx 11.222 \cdot 0.5 && \approx 5.611 \\
r_{O6} &= f(2.536) \cdot 0.5 && \approx 11.224 \cdot 0.5 && \approx 5.612 \\
r_{O7} &= f(3) \cdot 0.5 && = 10.935 \cdot 0.5 && \approx 5.468 \\
r_{O8} &= f(3.5) \cdot 0.5 && \approx 10.041 \cdot 0.5 && \approx 5.020 \\
r_{O9} &= f(4) \cdot 0.5 && = 8.64 \cdot 0.5 && = 4.32 \\
r_{O10} &= f(4.5) \cdot 0.5 && \approx 6.834 \cdot 0.5 && \approx 3.417 \\
r_{O11} &= f(5) \cdot 0.5 && = 4.725 \cdot 0.5 && \approx 2.363 \\
r_{O12} &= f(5.5) \cdot 0.5 && \approx 2.413 \cdot 0.5 && \approx 1.207
\end{aligned}$$

$$r_{\text{Ogesamt}} = r_{O1} + r_{O2} + \cdots + r_{O12} \approx 49.05$$

Untersumme:

$$\begin{aligned}
r_{U1} &= f(0) \cdot 0.5 && = 0 \cdot 0.5 && = 0 \\
r_{U2} &= f(0.5) \cdot 0.5 && \approx 4.269 \cdot 0.5 && \approx 2.135 \\
r_{U3} &= f(1) \cdot 0.5 && = 7.425 \cdot 0.5 && \approx 3.713 \\
r_{U4} &= f(1.5) \cdot 0.5 && \approx 9.568 \cdot 0.5 && \approx 4.784 \\
r_{U5} &= f(2) \cdot 0.5 && = 10.8 \cdot 0.5 && = 5.4 \\
r_{U6} &= f(3) \cdot 0.5 && = 10.935 \cdot 0.5 && \approx 5.468 \\
r_{U7} &= f(3.5) \cdot 0.5 && \approx 10.041 \cdot 0.5 && \approx 5.020 \\
r_{U8} &= f(4) \cdot 0.5 && = 8.64 \cdot 0.5 && = 4.32 \\
r_{U9} &= f(4.5) \cdot 0.5 && \approx 6.834 \cdot 0.5 && \approx 3.417 \\
r_{U10} &= f(5) \cdot 0.5 && = 4.725 \cdot 0.5 && \approx 2.363 \\
r_{U11} &= f(5.5) \cdot 0.5 && \approx 2.413 \cdot 0.5 && \approx 1.207 \\
r_{U12} &= f(6) \cdot 0.5 && = 0 \cdot 0.5 && = 0
\end{aligned}$$

$$r_{\text{Ugesamt}} = r_{U1} + r_{U2} + \cdots + r_{U12} \approx 37.83$$

c) Bestimmen Sie anschließend, wie viele Mio. m^3 Wasser nach 6 Stunden im Speicher mehr vorhanden sind als zu Beginn.

Arithmetisches Mittel aus Ober- und Untersumme:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{49.05 + 37.83}{2} \\
&= 43.44
\end{aligned}$$

Nach 6 Stunden sind etwa 43.44 Mio. m^3 Wasser mehr im Speicher als zu Beginn.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Treffen Sie außerdem die Aussage aus Teilaufgabe 6.1 c) nun mithilfe der Extrempunktberechnung („Untersuchen Sie, in welchem Zeitabschnitt die gespeicherte Wassermenge am stärksten ansteigt.“).

$$f'(x) = 0.405x^2 - 4.86x + 9.72$$
$$f''(x) = 0.81x - 4.86$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.405x^2 - 4.86x + 9.72 \quad | :0.405 \\ &= x^2 - 12x + 24 \\ x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{6^2 - 24} \\ x_1 &\approx 9.464 \quad \vee \quad x_2 \approx 2.536 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(9.464) &\approx 2.806 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ f''(2.536) &\approx -2.806 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(9.464) &\approx -11.224 \qquad \Rightarrow \text{TP}(9.46 \mid -11.22) \\ f(2.536) &\approx 11.224 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2.54 \mid 11.22) \end{aligned}$$

Die Zuflussrate ist im Hochpunkt am größten. Nach etwa 2.54 Stunden steigt die gespeicherte Wassermenge daher am stärksten an.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**