DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe TJH4W6

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x + 8 \\ f''(x) &= -4 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0 &= -2x^2 + 8x - 6 \quad | :(-2) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -4x + 8 \quad | +4x \\ 4x &= 8 \quad | :4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(2) = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 2 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2 \mid 2)$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -4 \qquad \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Da $f''(x) = -4$ konstant ist und nie 0 wird, besitzt die Funktion keinen Wendepunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $g(x) = 0.5x^3 - 3.1x^2 - 4x + 8.4$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1.5x^2 - 6.2x - 4 \\ g''(x) &= 3x - 6.2 \\ g'''(x) &= 3 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= 0.5x^3 - 3.1x^2 - 4x + 8.4 \quad | \, x_1 = -2 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & \frac{1}{2} & -\frac{31}{10} & -4 & \frac{42}{5} \\ -2 & & -1 & \frac{41}{5} & -\frac{42}{5} \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{41}{10} & \frac{21}{5} & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - 4.1x + 4.2 \quad | :0.5 \\ &= x^2 - 8.2x + 8.4 \\ x_{2/3} &= 4.1 \pm \sqrt{4.1^2 - 8.4} \\ x_2 = 7 \quad &\vee \quad x_3 = 1.2 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 1.5x^2 - 6.2x - 4 \quad | :1.5 \\ &= x^2 - \frac{62}{15}x - \frac{8}{3} \\ x_{1/2} &= \frac{31}{15} \pm \sqrt{\left(\frac{31}{15}\right)^2 + \frac{8}{3}} \\ x_1 \approx 4.701 \quad &\vee \quad x_2 \approx -0.567 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(4.701) &= 3 \cdot 4.701 - 6.2 = 7.903 > 0 \quad &\Rightarrow \text{TP} \\ g''(-0.567) &= 3 \cdot (-0.567) - 6.2 = -7.901 < 0 \quad &\Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(4.701) &\approx -26.968 \quad &\Rightarrow \text{TP}(4.7 \mid -26.97) \\ g(-0.567) &\approx 9.58 \quad &\Rightarrow \text{HP}(-0.57 \mid 9.58) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 6.2 \quad | \, +6.2 \\ 3x &= 6.2 \quad | \, :3 \\ x &= \frac{31}{15} \approx 2.067 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''\left(\frac{31}{15}\right) = 3 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$g\left(\frac{31}{15}\right) = -\frac{29341}{3375} \approx -8.694 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2.07 \mid -8.69)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \\ h''(x) &= -6x + 12 \\ h'''(x) &= -6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$h(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \quad | \, x_1 = 1$$

	-1	6	-9	4
1		-1	5	-4
	-1	5	-4	0

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 5x - 4 \qquad | \cdot(-1) \\ &= x^2 - 5x + 4 \\ x_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 12x - 9 \quad | :(-3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(3) &= -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ h''(1) &= -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h(3) &= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 4 = 4 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3 \mid 4) \\ h(1) &= -1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1 \mid 0) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x + 12 \quad | \, +6x \\ 6x &= 12 \quad | \, :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$h'''(2) = -6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$h(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 4 = 2 \qquad \Rightarrow \text{WP}_1(2 \mid 2)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $i(x) = 2x^4 - 5x^2 - 12$

$$i'(x) = 8x^3 - 10x$$
$$i''(x) = 24x^2 - 10$$
$$i'''(x) = 48x$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} i(x) &= 0 \\ 0 &= 2x^4 - 5x^2 - 12 && | :2 \\ &= x^4 - 2.5x^2 - 6 && | x^2 = z \\ &= z^2 - 2.5z - 6 \\ z_{1/2} &= 1.25 \pm \sqrt{1.25^2 + 6} \\ z_1 = 4 \quad &\vee \quad z_2 = -1.5 && | x = \sqrt{z} \\ x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Für $z_2 = -1.5 < 0$ gibt es keine reellen Lösungen.

Extrempunkt

notw. Bed.: $i'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 8x^3 - 10x \\ &= x(8x^2 - 10) && | x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 8x^2 - 10 && | +10 \\ 8x^2 &= 10 && | :8 \\ x^2 &= 1.25 && | \sqrt{\ } \\ x_2 = \sqrt{1.25} \approx 1.118 \quad &\vee \quad x_3 = -\sqrt{1.25} \approx -1.118 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $i'(x) = 0 \quad \wedge \quad i''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} i''(0) &= 24 \cdot 0^2 - 10 = -10 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ i''(\sqrt{1.25}) &= 24 \cdot 1.25 - 10 = 20 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ i''(-\sqrt{1.25}) &= 24 \cdot 1.25 - 10 = 20 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $i(x) = y$

$$\begin{aligned} i(0) &= -12 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid -12) \\ i(\sqrt{1.25}) &= 2 \cdot 1.25^2 - 5 \cdot 1.25 - 12 = -15.125 && \Rightarrow \text{TP}_1(1.12 \mid -15.13) \\ i(-\sqrt{1.25}) &= 2 \cdot 1.25^2 - 5 \cdot 1.25 - 12 = -15.125 && \Rightarrow \text{TP}_2(-1.12 \mid -15.13) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $i''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x^2 - 10 && | +10 \\ 24x^2 &= 10 && | :24 \\ x^2 &= \frac{5}{12} && | \sqrt{\ } \\ x_1 = \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0.645 \quad &\vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{12}} \approx -0.645 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $i''(x) = 0 \quad \wedge \quad i'''(x) \neq 0$

$$i'''\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right) \approx 30.984 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$i'''\left(-\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right) \approx -30.984 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $i(x) = y$

$$i\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{12} - 12 = -\frac{989}{72} \approx -13.736 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0.65 \mid -13.74)$$
$$i\left(-\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right) = -\frac{989}{72} \approx -13.736 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.65 \mid -13.74)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $j(x) = -0.25x^4 + x^3 + 2x^2$

$$\begin{aligned} j'(x) &= -x^3 + 3x^2 + 4x \\ j''(x) &= -3x^2 + 6x + 4 \\ j'''(x) &= -6x + 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} j(x) &= 0 \\ 0 &= -0.25x^4 + x^3 + 2x^2 \\ &= x^2(-0.25x^2 + x + 2) && | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -0.25x^2 + x + 2 && | \, :(-0.25) \\ &= x^2 - 4x - 8 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 8} \\ x_2 &\approx 5.464 \quad \vee \quad x_3 \approx -1.464 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $j'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 3x^2 + 4x \\ &= x(-x^2 + 3x + 4) && | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -x^2 + 3x + 4 && | \cdot(-1) \\ &= x^2 - 3x - 4 \\ x_{2/3} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 4} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $j'(x) = 0 \quad \wedge \quad j''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} j''(0) &= -3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ j''(4) &= -3 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 + 4 = -20 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ j''(-1) &= -3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 4 = -5 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $j(x) = y$

$$\begin{aligned} j(0) &= 0 && \Rightarrow \text{TP}(0 \mid 0) \\ j(4) &= -0.25 \cdot 4^4 + 4^3 + 2 \cdot 4^2 = 32 && \Rightarrow \text{HP}_1(4 \mid 32) \\ j(-1) &= -0.25 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = 0.75 && \Rightarrow \text{HP}_2(-1 \mid 0.75) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $j''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 6x + 4 && | \, :(-3) \\ &= x^2 - 2x - \frac{4}{3} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{4}{3}} \\ x_1 &\approx 2.528 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.528 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $j''(x) = 0 \quad \wedge \quad j'''(x) \neq 0$

$$j'''(2.528) = -6 \cdot 2.528 + 6 = -9.168 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$j'''(-0.528) = -6 \cdot (-0.528) + 6 = 9.168 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $j(x) = y$

$$j(2.528) \approx 18.727 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2.53 \mid 18.73)$$
$$j(-0.528) \approx 0.391 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.53 \mid 0.39)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $k(x) = 1.2x^5 - 5.25x^4 + 6x^3$

$$\begin{aligned} k'(x) &= 6x^4 - 21x^3 + 18x^2 \\ k''(x) &= 24x^3 - 63x^2 + 36x \\ k'''(x) &= 72x^2 - 126x + 36 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} k(x) &= 0 \\ 0 &= 1.2x^5 - 5.25x^4 + 6x^3 \\ &= x^3(1.2x^2 - 5.25x + 6) \qquad \mid x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 1.2x^2 - 5.25x + 6 \qquad \mid :1.2 \\ &= x^2 - 4.375x + 5 \\ x_{2/3} &= 2.1875 \pm \sqrt{2.1875^2 - 5} \\ &= 2.1875 \pm \sqrt{-0.215} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen

Extrempunkt
notw. Bed.: $k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x^4 - 21x^3 + 18x^2 \\ &= x^2(6x^2 - 21x + 18) \quad \mid x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 6x^2 - 21x + 18 \qquad \mid :6 \\ &= x^2 - 3.5x + 3 \\ x_{2/3} &= 1.75 \pm \sqrt{1.75^2 - 3} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = 1.5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k'(x) = 0 \quad \wedge \quad k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k''(0) &= 0 && \Rightarrow \text{hinr. Bed. nicht erfüllt} \\ k''(2) &= 24 \cdot 2^3 - 63 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 12 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ k''(1.5) &= 24 \cdot 1.5^3 - 63 \cdot 1.5^2 + 36 \cdot 1.5 = -6.75 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Da $k'''(0) = 36 \neq 0$ ist, liegt bei $x = 0$ kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt vor (siehe Wendepunkt).

y-Wert: $k(x) = y$

$$\begin{aligned} k(2) &= 1.2 \cdot 2^5 - 5.25 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 = 2.4 && \Rightarrow \text{TP}(2 \mid 2.4) \\ k(1.5) &= 1.2 \cdot 1.5^5 - 5.25 \cdot 1.5^4 + 6 \cdot 1.5^3 \approx 2.784 && \Rightarrow \text{HP}(1.5 \mid 2.78) \end{aligned}$$

Wendepunkt

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

notw. Bed.: $k''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x^3 - 63x^2 + 36x \\ &= x(24x^2 - 63x + 36) \qquad | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x^2 - 63x + 36 \qquad | \; :24 \\ &= x^2 - 2.625x + 1.5 \\ x_{2/3} &= 1.3125 \pm \sqrt{1.3125^2 - 1.5} \\ x_2 &\approx 1.784 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.841 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k''(x) = 0 \quad \wedge \quad k'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k'''(0) &= 36 \neq 0 && \checkmark \\ k'''(1.784) &= 72 \cdot 1.784^2 - 126 \cdot 1.784 + 36 \approx 40.367 \neq 0 && \checkmark \\ k'''(0.841) &= 72 \cdot 0.841^2 - 126 \cdot 0.841 + 36 \approx -19.042 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $k(x) = y$

$$\begin{aligned} k(0) &= 0 && \Rightarrow \mathrm{SP}(0 \mid 0) \\ k(1.784) &\approx 2.573 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.78 \mid 2.57) \\ k(0.841) &\approx 1.447 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(0.84 \mid 1.45) \end{aligned}$$

Der Wendepunkt bei $x = 0$ hat wegen $k'(0) = 0$ eine waagerechte Tangente und ist daher ein Sattelpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**