DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe SpXRts

In einer modernen Verpackungslinie werden Kartons automatisch gefaltet, befüllt und anschließend über ein Förderband zur Etikettierung transportiert. Gerade in den ersten Minuten nach dem Einschalten läuft die Linie noch nicht stabil: Manche Stationen „tasten“ sich ein, Material sammelt sich kurz, und die Mitarbeitenden greifen gelegentlich ein (z. B. wenn ein Karton schief steht). Damit der Schichtleiter die Anlaufphase besser beurteilen kann, wird der tatsächliche Durchsatz protokolliert. Dazu zählt ein Sensor, wie viele Pakete pro Minute das Ende des Förderbands passieren. Die Durchsatzrate $r(t)$ (Pakete/Minute) hängt von der Zeit t (in Minuten seit dem Start) ab und soll modellhaft durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben werden.
Die Messwerte lauten:

t **(min)**	0	2	4	6
$r(t)$ **(Pakete/min)**	30	34	62	66

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für $r(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ auf, das zu den Messwerten passt, und ermitteln Sie daraus eine passende Funktionsgleichung $r(t)$.

$$\begin{aligned}
r(0) = 30 \quad &\Rightarrow \quad 30 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \quad &= d \\
r(2) = 34 \quad &\Rightarrow \quad 34 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \quad &= 8a + 4b + 2c + d \\
r(4) = 62 \quad &\Rightarrow \quad 62 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d \quad &= 64a + 16b + 4c + d \\
r(6) = 66 \quad &\Rightarrow \quad 66 = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d \quad &= 216a + 36b + 6c + d
\end{aligned}$$

Mit $d = 30$ folgt:

$$\begin{aligned}
8a + 4b + 2c + 30 &= 34 \quad | -30 \\
8a + 4b + 2c &= 4 \quad | :2 \\
4a + 2b + c &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
64a + 16b + 4c + 30 &= 62 \quad | -30 \\
64a + 16b + 4c &= 32 \quad | :4 \\
16a + 4b + c &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
216a + 36b + 6c + 30 &= 66 \quad | -30 \\
216a + 36b + 6c &= 36 \quad | :6 \\
36a + 6b + c &= 6
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 16 & 4 & 1 & 8 \\ 36 & 6 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & -8 & -12 \end{array}\right) \quad \text{III} - 3 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

III $c = -12$

II $-4b - 3 \cdot (-12) = 0$
$-4b + 36 = 0 \quad | -36$
$-4b = -36 \quad | :(-4)$
$b = 9$

I $4a + 2 \cdot 9 - 12 = 2$
$4a + 6 = 2 \quad | -6$
$4a = -4 \quad | :4$
$a = -1$

$\Rightarrow r(t) = -t^3 + 9t^2 - 12t + 30$

b) Für die Tagesplanung ist nicht der Momentanwert entscheidend, sondern die Gesamtmenge der transportierten Pakete in den ersten 6 Minuten.

$$\begin{aligned} N &= \int_0^6 r(t)\,dt \\ &= \int_0^6 (-t^3 + 9t^2 - 12t + 30)\,dt \\ &= \left[-0.25t^4 + 3t^3 - 6t^2 + 30t\right]_0^6 \\ &= -0.25 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^3 - 6 \cdot 6^2 + 30 \cdot 6 - 0 \\ &= -324 + 648 - 216 + 180 \\ &= 288 \end{aligned}$$

In den ersten 6 Minuten werden also insgesamt 288 Pakete transportiert.

c) Geben Sie den durchschnittlichen Durchsatz im Zeitraum $[0; 6]$ an (in Paketen pro Minute) und deuten Sie diesen Wert im Kontext: Was sagt er über die Anlaufphase aus?

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{6-0} \int_0^6 (-t^3 + 9t^2 - 12t + 30)\,dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot 288 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Im angegebenen Zeitraum wurden durchschnittlich 48 Pakete pro Minute verarbeitet. Auch ohne direkten Vergleichswert wirkt dieser Durchsatz durchaus hoch, denn das entspricht einem Paket alle 1.25 Sekunden. Der Durchschnitt liegt aber deutlich unter dem Wert von 66 Paketen pro Minute nach 6 Minuten: In der Anlaufphase, besonders in den ersten Minuten, läuft die Linie also noch nicht mit voller Leistung.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Die Linie gilt als „eingeschwungen“, sobald insgesamt 200 Pakete transportiert wurden. Bestimmen Sie, ab welcher Minute dieser Wert im Modell erreicht wird. Eine Annäherung dieses Wertes mit Hilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners ist ausreichend.

Gesucht ist der Zeitpunkt t, für den gilt: $\int_0^t r(x)\,dx = 200$

$$\int_0^t (-x^3 + 9x^2 - 12x + 30)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 30x\right]_0^t$$
$$= -\frac{1}{4}t^4 + 3t^3 - 6t^2 + 30t - 0$$

$$-\frac{1}{4}t^4 + 3t^3 - 6t^2 + 30t = 200 \quad | -200$$
$$-\frac{1}{4}t^4 + 3t^3 - 6t^2 + 30t - 200 = 0 \quad | \cdot(-4)$$
$$t^4 - 12t^3 + 24t^2 - 120t + 800 = 0 \quad | \, t_1 = 10$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	− 12	24	− 120	800
10		10	− 20	40	− 800
	1	− 2	4	− 80	0

$$0 = t^3 - 2t^2 + 4t - 80$$

Die Lösung $t_1 = 10$ liegt außerhalb des betrachteten Zeitraums. Mit der Tabellenfunktion des Taschenrechners erhält man für die Restgleichung als relevante Lösung im Intervall $0 \le t \le 6$ den Wert $t_2 \approx 4.73$.

Der Wert von 200 Paketen wird also nach ungefähr 4.73 Minuten erreicht. Ab da gilt die Linie als „eingeschwungen“.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**