DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe SeccRW

Bei Hochwasser setzt das THW (Technisches Hilfswerk) mobile Wasseraufbereitung ein. Vor dem Einsatz läuft ein kurzer Funktionstest: Leitungen werden entlüftet, Ventile öffnen schrittweise, die Pumpe regelt sich ein. Die Förderrate wird dabei erfasst, um zu prüfen, ob die Pumpe zuverlässig anläuft, wann sie stabil arbeitet und ob es kritische Phasen mit starkem Anstieg oder Abfall gibt (Lastwechsel/Belastung von Schläuchen und Filtern).
Im Modell beschreibt

$$w(t) = -0.08t^3 + 0.96t^2 + 0.6t$$

die Förderrate in Liter pro Sekunde. Dabei ist t die Zeit in Sekunden ($0 \le t \le 13$).

a) Bestimmen Sie, wann die Pumpe überhaupt fördert und wann nicht. Diese Zeiten markieren Beginn/Ende sinnvoller Förderung.

$$\begin{aligned}
w(t) &= 0 \\
0 &= -0.08t^3 + 0.96t^2 + 0.6t \\
&= t(-0.08t^2 + 0.96t + 0.6) && \mid t_1 = 0 \\
\\
0 &= -0.08t^2 + 0.96t + 0.6 && \mid :(-0.08) \\
&= t^2 - 12t - 7.5 \\
t_{2/3} &= 6 \pm \sqrt{6^2 + 7.5} \\
t_2 &\approx 12.595 \quad \vee \quad t_3 \approx -0.595
\end{aligned}$$

Im Intervall $0 \le t \le 13$ liegen nur die Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_2 \approx 12.595$. Dazwischen ist $w(t) > 0$, danach negativ.

Die Pumpe fördert also im Zeitraum $0 < t < 12.595$. Zu Beginn ($t = 0$) und ab etwa 12.6 s findet keine sinnvolle Förderung statt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Ermitteln Sie, wann die Förderrate am größten ist, damit der aussagekräftigste Abschnitt des Testlaufs dokumentiert werden kann.

$$\begin{aligned} w'(t) &= -0.24t^2 + 1.92t + 0.6 \\ w''(t) &= -0.48t + 1.92 \\ w'''(t) &= -0.48 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $w'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.24t^2 + 1.92t + 0.6 && | :(-0.24) \\ &= t^2 - 8t - 2.5 \\ t_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{4^2 + 2.5} \\ t_1 &\approx 8.301 \quad \vee \quad t_2 \approx -0.301 \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \leq t \leq 13$ ist nur $t_1 \approx 8.301$ relevant.

hinr. Bed.: $w'(t) = 0 \quad \wedge \quad w''(t) \neq 0$

$$w''(8.301) = -0.48 \cdot 8.301 + 1.92 = -2.064 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $w(t) = y$

$$w(8.301) \approx 25.371 \qquad \Rightarrow \text{HP}(8.3 \mid 25.37)$$

Die Randwerte $w(0) = 0$ und $w(13) = -5.72$ sind kleiner. Die Förderrate ist also nach etwa 8.3 s mit etwa 25.37 $\frac{\text{L}}{\text{s}}$ am größten.

c) Bestimmen Sie, wann sich das Verhalten sichtbar „ändert“: Es gibt einen Zeitpunkt, ab dem die Zunahme der Förderrate nicht mehr stärker wird, sondern wieder „abflacht“. Dieser Moment ist relevant, weil ab dort ein anderes Regelverhalten vorliegt.

Gesucht ist der Wendepunkt der Funktion.

$$\begin{aligned} w''(t) &= -0.48t + 1.92 \\ w'''(t) &= -0.48 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $w''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.48t + 1.92 && | +0.48t \\ 0.48t &= 1.92 && | :0.48 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $w''(t) = 0 \quad \wedge \quad w'''(t) \neq 0$

$$w'''(4) = -0.48 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $w(t) = y$

$$w(4) = -0.08 \cdot 4^3 + 0.96 \cdot 4^2 + 0.6 \cdot 4 = 12.64 \qquad \Rightarrow \text{WP}_1(4 \mid 12.64)$$

Der sichtbare „Übergang“ liegt also nach 4 s. Ab da nimmt die Förderrate zwar weiter zu, aber immer schwächer.

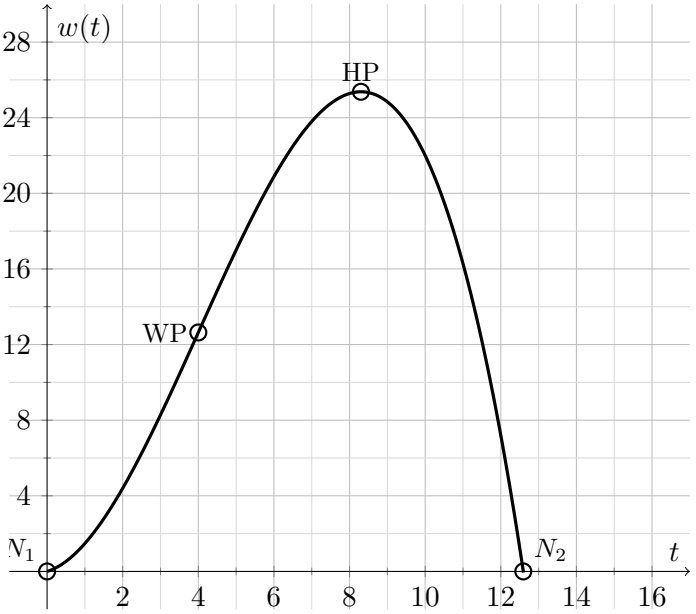
DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Für die Einsatzleitung wird ein Referenzwert benötigt: Wie stark ändert sich die Förderrate genau bei $t = 6$? Ab einer Änderung der Förderrate von $4\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}^2}$ gilt diese als „stark“.

$$\begin{aligned} w'(6) &= -0.24 \cdot 6^2 + 1.92 \cdot 6 + 0.6 \\ &= -8.64 + 11.52 + 0.6 \\ &= 3.48 \end{aligned}$$

Bei $t = 6$ ändert sich die Förderrate also mit $3.48\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}^2}$. Da $3.48 < 4$ ist, liegt hier noch keine „starke“ Änderung der Förderrate vor.

e) Skizzieren Sie den Verlauf so, dass Start-/Endzeiten der Förderung, stärkste Förderung und der „Übergang“ im Verlauf erkennbar sind.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**