DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ST5fRa

In einem Hochregallager fährt ein Regalbediengerät eine Palette auf eine Zielhöhe. Für die Steuerung ist wichtig, wann der Hub am schnellsten läuft, wo die Bewegung umschaltet (sanfter Übergang), und ob die maximale zulässige Höhe sicher eingehalten wird. Die Hubhöhe (in m) ist modelliert durch

$$h(t) = -0.03t^3 + 0.12t^2 + 1.8t$$

mit $0 \le t \le 10$, t in Sekunden.

a) Ermitteln Sie, zu welchen Zeitpunkten im gegebenen Intervall die Greifeinheit die Bodenhöhe erreicht, damit Start- und Endpunkte eines Fahrzyklus eindeutig festgelegt werden können.

$$\begin{aligned}
h(t) &= 0 \\
0 &= -0.03t^3 + 0.12t^2 + 1.8t \\
&= t(-0.03t^2 + 0.12t + 1.8) \quad | \, t_1 = 0 \\
\\
0 &= -0.03t^2 + 0.12t + 1.8 \qquad | \, :(-0.03) \\
&= t^2 - 4t - 60 \\
t_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 60} \\
t_2 &= 10 \quad \vee \quad t_3 = -6
\end{aligned}$$

Im Intervall $0 \le t \le 10$ liegen nur $t_1 = 0$ und $t_2 = 10$.

Die Greifeinheit erreicht die Bodenhöhe also zu Beginn ($t = 0$) und nach 10 s ($t = 10$).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Prüfen Sie, ob im gesamten betrachteten Zeitraum die zulässige Maximalhöhe $h_{\max} = 10$ eingehalten wird, um Kollisionen mit Querträgern/Sicherheitszonen auszuschließen.

$$\begin{aligned} h'(t) &= -0.09t^2 + 0.24t + 1.8 \\ h''(t) &= -0.18t + 0.24 \\ h'''(t) &= -0.18 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $h'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.09t^2 + 0.24t + 1.8 && | :(-0.09) \\ &= t^2 - \frac{8}{3}t - 20 \\ t_{1/2} &= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 20} \\ t_1 &= 6 \quad \vee \quad t_2 = -\frac{10}{3} \approx -3.333 \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \leq t \leq 10$ ist nur $t_1 = 6$ relevant.

hinr. Bed.: $h'(t) = 0 \quad \wedge \quad h''(t) \neq 0$

$$h''(6) = -0.18 \cdot 6 + 0.24 = -0.84 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $h(t) = y$

$$h(6) = -0.03 \cdot 6^3 + 0.12 \cdot 6^2 + 1.8 \cdot 6 = 8.64 \qquad \Rightarrow \text{HP}(6 \mid 8.64)$$

Randwerte:

$$h(0) = 0 \quad \wedge \quad h(10) = 0$$

Die maximale Höhe im betrachteten Zeitraum beträgt also 8.64 m. Da $8.64 < 10$ ist, wird die zulässige Maximalhöhe im gesamten betrachteten Zeitraum eingehalten.

c) Beurteilen Sie anhand des Funktionsverlaufs und/oder der Ergebnisse aus b), ob die Programmierung der Greifeinheit im Zeitraum zwischen 0 und 6 Sekunden erfolgreich war und die Einheit ausschließlich nach oben fährt oder ob zwischendurch auch Absenkphasen auftreten.

Aus b) ist bekannt, dass bei $t = 6$ ein Hochpunkt vorliegt. Zwischen dem Start bei $t = 0$ und diesem Hochpunkt liegen keine weiteren Extrempunkte, die Höhe steigt in diesem Zeitraum also durchgehend an.

Im Zeitraum $0 < t < 6$ fährt die Greifeinheit somit ausschließlich nach oben, Absenkphasen treten nicht auf. Die Programmierung war in diesem Abschnitt erfolgreich.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Ermitteln Sie den Zeitbereich, in dem die Greifeinheit am schnellsten angehoben wird (größte positive Änderungsrate), um die kritischsten Bewegungsphasen im Hinblick auf Lastpendeln und Verschleiß zu identifizieren. Die Hubbewegung darf dabei die Geschwindigkeit von $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nicht überschreiten.

Die größte positive Änderungsrate ist das Maximum von $h'(t)$, also der Wendepunkt von h.

$$\begin{aligned} h'(t) &= -0.09t^2 + 0.24t + 1.8 \\ h''(t) &= -0.18t + 0.24 \\ h'''(t) &= -0.18 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $h''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.18t + 0.24 && |\ +0.18t \\ 0.18t &= 0.24 && |\ :0.18 \\ t &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(t) = 0 \quad \wedge \quad h'''(t) \neq 0$

$$h'''\left(\frac{4}{3}\right) = -0.18 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Wegen $h'''(t) < 0$ hat h' dort ein Maximum.

Steigung an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} h'\left(\frac{4}{3}\right) &= -0.09 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 0.24 \cdot \frac{4}{3} + 1.8 \\ &= -0.16 + 0.32 + 1.8 \\ &= 1.96 \end{aligned}$$

Die Greifeinheit wird also nach etwa 1.33 s am schnellsten angehoben, und zwar mit $1.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Da $1.96 < 2$ ist, wird die zulässige Geschwindigkeit von $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nicht überschritten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**