DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe QxtjJJ

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V. Entscheiden Sie dabei sinnvoll, ob ggf. Symmetrie (z. B. Intervall $[-a;a]$) Rechenwege verkürzt.

a) $f(x) = 3 - x^2$ Intervall $[-1;1]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (3-x^2)^2 &= 3^2 - 2\cdot 3\cdot x^2 + (x^2)^2\\ &= x^4 - 6x^2 + 9\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2\,dx\\ &= 2\pi\int_{0}^{1}(x^4-6x^2+9)\,dx\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 9x\right]_0^1\\ &= 2\pi\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5 - 2\cdot 1^3 + 9\cdot 1 - 0\right)\\ &= 2\pi\cdot\frac{36}{5}\\ &= \frac{72}{5}\pi \approx 45.239\end{aligned}$$

b) $f(x) = 1.5x + 2$ Intervall $[-2;2]$

Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, daher bringt Symmetrie hier keine Vereinfachung.

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (1.5x+2)^2 &= (1.5x)^2 + 2\cdot 1.5x\cdot 2 + 2^2\\ &= 2.25x^2 + 6x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-2}^{2}(1.5x+2)^2\,dx\\ &= \pi\int_{-2}^{2}(2.25x^2+6x+4)\,dx\\ &= \pi\left[0.75x^3 + 3x^2 + 4x\right]_{-2}^{2}\\ &= \pi\left(0.75\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - \left(0.75\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)\right)\right)\\ &= \pi\left(6 + 12 + 8 - (-6 + 12 - 8)\right)\\ &= \pi\left(26 - (-2)\right)\\ &= 28\pi \approx 87.965\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 3$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (-0.5x^2 + 2x + 3)^2 &= (-0.5x^2 + 2x + 3)(-0.5x^2 + 2x + 3)\\ &= 0.25x^4 - x^3 - 1.5x^2\\ &\quad - x^3 + 4x^2 + 6x\\ &\quad - 1.5x^2 + 6x + 9\\ &= 0.25x^4 - 2x^3 + x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 (-0.5x^2 + 2x + 3)^2 \, dx\\ &= \pi \int_0^4 (0.25x^4 - 2x^3 + x^2 + 12x + 9) \, dx\\ &= \pi \left[0.05x^5 - 0.5x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 9x\right]_0^4\\ &= \pi \left(0.05 \cdot 4^5 - 0.5 \cdot 4^4 + \frac{1}{3} \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 0\right)\\ &= \pi \left(51.2 - 128 + \frac{64}{3} + 96 + 36\right)\\ &= \frac{1148}{15}\pi \approx 240.437\end{aligned}$$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ Intervall $[0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (x^2 - 2x + 2)^2 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2\\ &\quad - 2x^3 + 4x^2 - 4x\\ &\quad + 2x^2 - 4x + 4\\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)^2 \, dx\\ &= \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4) \, dx\\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 4x\right]_0^3\\ &= \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - 3^4 + \frac{8}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 0\right)\\ &= \pi \left(\frac{243}{5} - 81 + 72 - 36 + 12\right)\\ &= \frac{78}{5}\pi \approx 49.009\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 4 - 0.25x^2$ Intervall $[-4; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (4 - 0.25x^2)^2 &= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 0.25x^2 + (0.25x^2)^2 \\ &= 0.0625x^4 - 2x^2 + 16\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-4}^{4} (4 - 0.25x^2)^2 \, dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{4} (0.0625x^4 - 2x^2 + 16) \, dx \\ &= 2\pi \left[0.0125x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 16x\right]_0^4 \\ &= 2\pi \left(0.0125 \cdot 4^5 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 16 \cdot 4 - 0\right) \\ &= 2\pi \left(12.8 - \frac{128}{3} + 64\right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{512}{15} \\ &= \frac{1024}{15}\pi \approx 214.466\end{aligned}$$

f) $f(x) = 0.1x^3 + 1$ Intervall $[0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.1x^3 + 1)^2 &= (0.1x^3)^2 + 2 \cdot 0.1x^3 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 0.01x^6 + 0.2x^3 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{0}^{3} (0.1x^3 + 1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{0}^{3} (0.01x^6 + 0.2x^3 + 1) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{700}x^7 + 0.05x^4 + x\right]_0^3 \\ &= \pi \left(\frac{1}{700} \cdot 3^7 + 0.05 \cdot 3^4 + 3 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{2187}{700} + 4.05 + 3\right) \\ &= \frac{3561}{350}\pi \approx 31.963\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = 2.5 - 0.5x^2$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (2.5 - 0.5x^2)^2 &= 2.5^2 - 2 \cdot 2.5 \cdot 0.5x^2 + (0.5x^2)^2 \\ &= 0.25x^4 - 2.5x^2 + 6.25\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-2}^{2} (2.5 - 0.5x^2)^2 \, dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{2} (0.25x^4 - 2.5x^2 + 6.25) \, dx \\ &= 2\pi \left[0.05x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 6.25x\right]_0^2 \\ &= 2\pi \left(0.05 \cdot 2^5 - \frac{5}{6} \cdot 2^3 + 6.25 \cdot 2 - 0\right) \\ &= 2\pi \left(1.6 - \frac{20}{3} + 12.5\right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{223}{30} \\ &= \frac{223}{15}\pi \approx 46.705\end{aligned}$$

h) $f(x) = 0.8x + 1.6$ Intervall $[-3; 3]$

Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, daher bringt Symmetrie hier keine Vereinfachung.

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.8x + 1.6)^2 &= (0.8x)^2 + 2 \cdot 0.8x \cdot 1.6 + 1.6^2 \\ &= 0.64x^2 + 2.56x + 2.56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-3}^{3} (0.8x + 1.6)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-3}^{3} (0.64x^2 + 2.56x + 2.56) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{16}{75}x^3 + 1.28x^2 + 2.56x\right]_{-3}^{3} \\ &= \pi \Big(\frac{16}{75} \cdot 3^3 + 1.28 \cdot 3^2 + 2.56 \cdot 3 \\ &\qquad - \left(\frac{16}{75} \cdot (-3)^3 + 1.28 \cdot (-3)^2 + 2.56 \cdot (-3)\right)\Big) \\ &= \pi \left(5.76 + 11.52 + 7.68 - (-5.76 + 11.52 - 7.68)\right) \\ &= \pi \left(24.96 - (-1.92)\right) \\ &= 26.88\pi \approx 84.446\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = -0.2x^2 + 1.4x + 2.2$ Intervall $[0; 5]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (-0.2x^2 + 1.4x + 2.2)^2 &= (-0.2x^2 + 1.4x + 2.2)(-0.2x^2 + 1.4x + 2.2)\\ &= 0.04x^4 - 0.28x^3 - 0.44x^2\\ &\quad - 0.28x^3 + 1.96x^2 + 3.08x\\ &\quad - 0.44x^2 + 3.08x + 4.84\\ &= 0.04x^4 - 0.56x^3 + 1.08x^2 + 6.16x + 4.84\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^5 (-0.2x^2 + 1.4x + 2.2)^2 \, dx\\ &= \pi \int_0^5 (0.04x^4 - 0.56x^3 + 1.08x^2 + 6.16x + 4.84) \, dx\\ &= \pi \left[0.008x^5 - 0.14x^4 + 0.36x^3 + 3.08x^2 + 4.84x\right]_0^5\\ &= \pi \left(0.008 \cdot 5^5 - 0.14 \cdot 5^4 + 0.36 \cdot 5^3 + 3.08 \cdot 5^2 + 4.84 \cdot 5 - 0\right)\\ &= \pi \left(25 - 87.5 + 45 + 77 + 24.2\right)\\ &= 83.7\pi \approx 262.951\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**