DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe QiuSkQ

Ein Start-up entwickelt eine neue Stumpenkerze. Die Kerze soll eine besondere, leicht taillierte Form haben und wird später aus einer Silikonform gegossen. In einem Querschnitt wird die Außenkontur (Radius) durch eine Funktion modelliert. Dreht sich dieser Querschnitt um die x-Achse, entsteht der dreidimensionale Kerzenkörper.
Gegeben ist der Radius in cm durch

$$f(x) = -0.002x^2 + 0.02x + 6 \qquad \text{für } 0 \le x \le 30$$

Dabei beschreibt x die Höhe der Kerze in cm (vom Boden nach oben).

a) Ermitteln Sie, wie groß der Durchmesser am Kerzenboden und an der Kerzenoberkante ist, und deuten Sie die Werte im Kontext.

Am Kerzenboden gilt $x = 0$, an der Kerzenoberkante $x = 30$.

$$f(0) = -0.002 \cdot 0^2 + 0.02 \cdot 0 + 6 = 6$$
$$f(30) = -0.002 \cdot 30^2 + 0.02 \cdot 30 + 6 = 4.8$$

$$D_{\text{Boden}} = 2 \cdot 6 = 12$$
$$D_{\text{oben}} = 2 \cdot 4.8 = 9.6$$

Der Durchmesser beträgt am Boden 12 cm und an der Oberkante 9.6 cm. Die Kerze ist unten also breiter als oben, sie läuft nach oben hin etwas schmaler zu.

b) Um Verpackung und Standfestigkeit planen zu können, ist die größte Breite entscheidend. Bestimmen Sie, an welcher Höhe die Kerze am breitesten ist und wie groß der Maximaldurchmesser dort ausfällt.

$$f'(x) = -0.004x + 0.02$$
$$f''(x) = -0.004$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.004x + 0.02 && \mid +0.004x \\ 0.004x &= 0.02 && \mid :0.004 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(5) = -0.004 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(5) = -0.002 \cdot 5^2 + 0.02 \cdot 5 + 6 = 6.05 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5 \mid 6.05)$$

Die Randwerte $f(0) = 6$ und $f(30) = 4.8$ sind kleiner. Die Kerze ist also in 5 cm Höhe am breitesten, der Maximaldurchmesser beträgt dort $2 \cdot 6.05 = 12.1$ cm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Für die Materialplanung soll abgeschätzt werden, wie viel Wachs pro Kerze benötigt wird. Stellen Sie ein geeignetes Integral für das Kerzenvolumen auf und bestimmen Sie das Volumen in Litern.

$$V = \pi \int_0^{30} \left(-0.002x^2 + 0.02x + 6\right)^2 \, dx$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}(-0.002x^2 + 0.02x + 6)^2 &= \left(-\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{50}x + 6\right)\left(-\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{50}x + 6\right) \\ &= \frac{1}{250000}x^4 - \frac{1}{25000}x^3 - \frac{3}{250}x^2 \\ &\quad - \frac{1}{25000}x^3 + \frac{1}{2500}x^2 + \frac{3}{25}x \\ &\quad - \frac{3}{250}x^2 + \frac{3}{25}x + 36 \\ &= \frac{1}{250000}x^4 - \frac{1}{12500}x^3 - \frac{59}{2500}x^2 + \frac{6}{25}x + 36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{30} \left(-0.002x^2 + 0.02x + 6\right)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^{30} \left(\frac{1}{250000}x^4 - \frac{1}{12500}x^3 - \frac{59}{2500}x^2 + \frac{6}{25}x + 36\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{1250000}x^5 - \frac{1}{50000}x^4 - \frac{59}{7500}x^3 + \frac{3}{25}x^2 + 36x\right]_0^{30} \\ &= \pi \left(\frac{1}{1250000} \cdot 30^5 - \frac{1}{50000} \cdot 30^4 - \frac{59}{7500} \cdot 30^3 + \frac{3}{25} \cdot 30^2 + 36 \cdot 30 - 0\right) \\ &= \pi \left(19.44 - 16.2 - 212.4 + 108 + 1080\right) \\ &= 978.84\pi \approx 3075.117\end{aligned}$$

Das Volumen beträgt ungefähr $3075.117\,\mathrm{cm}^3 \approx 3.075\,\mathrm{dm}^3 = 3.075\,\mathrm{L}$.

d) Kerzenwachs hat ungefähr eine Dichte von $0.90\,\mathrm{g/cm}^3$. Berechnen Sie daraus die Masse einer Kerze in Kilogramm und interpretieren Sie, ob das Ergebnis zu einer „Stumpenkerze“ passt.

$$\begin{aligned}m &= \rho \cdot V \\ &= 0.90\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 3075.117\,\mathrm{cm}^3 \\ &\approx 2767.605\,\mathrm{g} \approx 2.768\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

Die Kerze hat also eine Masse von ungefähr $2.77\,\mathrm{kg}$. Das ist für eine Stumpenkerze ziemlich groß und schwer. Das Ergebnis passt also eher zu einer sehr großen oder besonders massiven Stumpenkerze.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**