DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe PrcmZP

Eine Fußgängerbrücke führt über eine sechsspurige Schnellstraße. Der Bogen dieser Brücke wird durch die Funktion $b(x) = 0.01x^3 - 0.07x^2 - 0.05x + 0.75$ modelliert. Dabei ist x die Breite und $b(x)$ die Höhe des Bogens über dem Boden in Metern (eine Einheit entspricht jeweils 10 Metern). Aus den Bauplänen ist bekannt: Bei $x = -3$ liegt der Bogen auf Bodenniveau.

a) Weisen Sie durch Einsetzen nach, dass $x = -3$ eine Nullstelle von b ist.

$$\begin{aligned} b(-3) &= 0.01 \cdot (-3)^3 - 0.07 \cdot (-3)^2 - 0.05 \cdot (-3) + 0.75 \\ &= -0.27 - 0.63 + 0.15 + 0.75 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $x = -3$ eine Nullstelle von b.

b) Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen von b.

Die Polynomdivision kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$0 = 0.01x^3 - 0.07x^2 - 0.05x + 0.75 \quad | \, x_1 = -3$$

$$\left(\tfrac{1}{100}x^3 - \tfrac{7}{100}x^2 - \tfrac{1}{20}x + \tfrac{3}{4} \right) \div \left(x + 3 \right) = \tfrac{1}{100}x^2 - \tfrac{1}{10}x + \tfrac{1}{4}$$

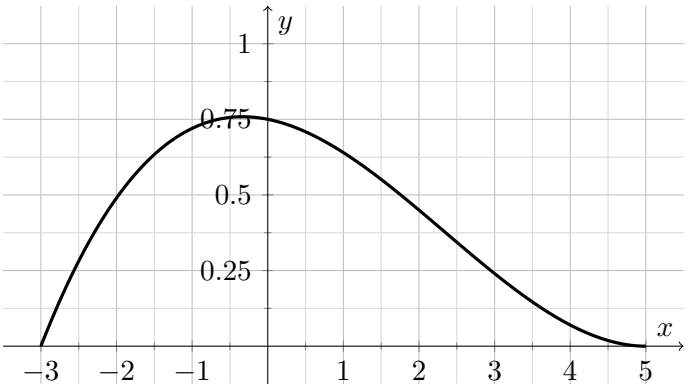
$$\begin{array}{r} -\left(\tfrac{1}{100}x^3 + \tfrac{3}{100}x^2\right) \\ \hline -\tfrac{1}{10}x^2 - \tfrac{1}{20}x \\ -\left(-\tfrac{1}{10}x^2 - \tfrac{3}{10}x\right) \\ \hline \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4} \\ -\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}\right) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.01x^2 - 0.1x + 0.25 \quad | :0.01 \\ &= x^2 - 10x + 25 \\ x_{2/3} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 25} \\ &= 5 \pm 0 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$x_2 = 5$ ist eine doppelte Nullstelle. Weitere Nullstellen gibt es nicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

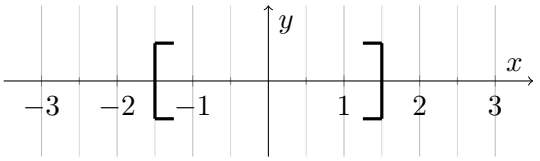
c) Zeichnen Sie den Graphen von b mithilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners. (Koordinatensystem: x-Achse: $-3 \leq x \leq 5$ mit $1\,\text{cm} = 10\,\text{m}$; y-Achse: $0 \leq y \leq 1$ mit $1\,\text{cm} = 2.5\,\text{m}$)



d) Geben Sie die Spannweite des Brückenbogens an.

$$\text{Spannweite: } 5 - (-3) = 8 \text{ Einheiten} = 80\,\text{m}$$

e) Die Schnellstraße ist inklusive Mittel- und Seitenstreifen 30 m breit. Die Mitte der Straße liegt bei $x = 0$. Auch an den äußersten Rändern der Seitenstreifen muss die Brücke noch mindestens 5 Meter über der Fahrbahn liegen. Wird diese Vorgabe eingehalten?



$$30\,\text{m} = 3 \text{ Einheiten} \quad \Rightarrow \quad \text{Straßenränder bei } x = -1.5 \text{ und } x = 1.5$$
$$5\,\text{m} = 0.5 \text{ Einheiten} \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung: } b(x) \geq 0.5$$
$$b(-1.5) = 0.01 \cdot (-1.5)^3 - 0.07 \cdot (-1.5)^2 - 0.05 \cdot (-1.5) + 0.75 = 0.63375 \geq 0.5$$
$$b(1.5) = 0.01 \cdot 1.5^3 - 0.07 \cdot 1.5^2 - 0.05 \cdot 1.5 + 0.75 = 0.55125 \geq 0.5$$

An den Rändern liegt die Brücke etwa 6.34 m bzw. 5.51 m über der Fahrbahn, also an beiden Rändern höher als 5 m. Die Vorgabe wird eingehalten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**