DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe MqVJqV

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V des „Hohlkörpers“, der entsteht, wenn die Fläche zwischen $f(x)$ (Außenradius) und $g(x)$ (Innenradius) im Intervall um die x-Achse rotiert. Im Intervall gilt jeweils $f(x) > g(x)$.

a) $f(x) = -0.25x^2 + x + 4 \qquad g(x) = 0.5x + 1 \qquad \text{Intervall } [0; 4]$

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (-0.25x^2 + x + 4)^2 - (0.5x + 1)^2 \\
&= (-0.25x^2 + x + 4)(-0.25x^2 + x + 4) \\
&\quad - \left((0.5x)^2 + 2 \cdot 0.5x \cdot 1 + 1^2\right) \\
&= 0.0625x^4 - 0.25x^3 - x^2 \\
&\quad - 0.25x^3 + x^2 + 4x \\
&\quad - x^2 + 4x + 16 - (0.25x^2 + x + 1) \\
&= 0.0625x^4 - 0.5x^3 - x^2 + 8x + 16 - (0.25x^2 + x + 1) \\
&= 0.0625x^4 - 0.5x^3 - 1.25x^2 + 7x + 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx \\
&= \pi \int_0^4 (0.0625x^4 - 0.5x^3 - 1.25x^2 + 7x + 15)\, dx \\
&= \pi \left[0.0125x^5 - 0.125x^4 - \frac{5}{12}x^3 + 3.5x^2 + 15x\right]_0^4 \\
&= \pi \left(0.0125 \cdot 4^5 - 0.125 \cdot 4^4 - \frac{5}{12} \cdot 4^3 + 3.5 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 - 0\right) \\
&= \pi \left(12.8 - 32 - \frac{80}{3} + 56 + 60\right) \\
&= \frac{1052}{15}\pi \approx 220.330
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x + 3 \qquad g(x) = 1 \qquad \text{Intervall } [0; 5]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (x+3)^2 - 1^2 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 1 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 1 \\ &= x^2 + 6x + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^5 \Big(f(x)^2 - g(x)^2\Big)\, dx \\ &= \pi \int_0^5 (x^2 + 6x + 8)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\right]_0^5 \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{125}{3} + 75 + 40\right) \\ &= \frac{470}{3}\pi \approx 492.183\end{aligned}$$

c) $f(x) = -0.5x^2 + 4 \qquad g(x) = 1 \qquad \text{Intervall } [-2; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (-0.5x^2 + 4)^2 - 1^2 \\ &= (-0.5x^2)^2 + 2 \cdot (-0.5x^2) \cdot 4 + 4^2 - 1 \\ &= 0.25x^4 - 4x^2 + 16 - 1 \\ &= 0.25x^4 - 4x^2 + 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-2}^2 \Big(f(x)^2 - g(x)^2\Big)\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 (0.25x^4 - 4x^2 + 15)\, dx \\ &= \pi \left[0.05x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 15x\right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left(0.05 \cdot 2^5 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 15 \cdot 2 - \left(0.05 \cdot (-2)^5 - \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 + 15 \cdot (-2)\right)\right) \\ &= \pi \left(1.6 - \frac{32}{3} + 30 - \left(-1.6 + \frac{32}{3} - 30\right)\right) \\ &= \pi \left(\frac{314}{15} - \left(-\frac{314}{15}\right)\right) \\ &= \frac{628}{15}\pi \approx 131.528\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 2x + 5 \qquad g(x) = x + 1 \qquad \text{Intervall } [0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (2x+5)^2 - (x+1)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2\right) \\ &= 4x^2 + 20x + 25 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= 3x^2 + 18x + 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx \\ &= \pi \int_0^3 (3x^2 + 18x + 24)\, dx \\ &= \pi \left[x^3 + 9x^2 + 24x\right]_0^3 \\ &= \pi \left(3^3 + 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 0\right) \\ &= \pi \left(27 + 81 + 72\right) \\ &= 180\pi \approx 565.487\end{aligned}$$

e) $f(x) = 6 - x \qquad g(x) = 2 \qquad \text{Intervall } [0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (6-x)^2 - 2^2 \\ &= 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + x^2 - 4 \\ &= 36 - 12x + x^2 - 4 \\ &= x^2 - 12x + 32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx \\ &= \pi \int_0^4 (x^2 - 12x + 32)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 32x\right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 32 \cdot 4 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{64}{3} - 96 + 128\right) \\ &= \frac{160}{3}\pi \approx 167.552\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^2 + 4 \qquad g(x) = x + 1 \qquad \text{Intervall } [0; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 - g(x)^2 &= (x^2+4)^2 - (x+1)^2 \\ &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2\right) \\ &= x^4 + 8x^2 + 16 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= x^4 + 7x^2 - 2x + 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 + 7x^2 - 2x + 15)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{3}x^3 - x^2 + 15x\right]_0^2 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{7}{3} \cdot 2^3 - 2^2 + 15 \cdot 2 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{56}{3} - 4 + 30\right) \\ &= \frac{766}{15}\pi \approx 160.431\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**