DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe Lsp33W

Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ verläuft durch die Punkte A, B und C. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) $A(1 \mid 0)$, $B(2 \mid 3)$, $C(-1 \mid 6)$

$$
\begin{aligned}
0 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c && = a + b + c \\
3 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c && = 4a + 2b + c \\
6 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c && = a - b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad \text{III} - \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & 3c = 3 && \mid :3 \\
& c = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & -2b - 3 \cdot 1 = 3 && \mid +3 \\
& -2b = 6 && \mid :(-2) \\
& b = -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & a - 3 + 1 = 0 && \mid +2 \\
& a = 2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $A(0 \mid -2)$, $B(2 \mid 4)$, $C(-1 \mid -7.5)$

$$\begin{aligned} -2 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & &= c \\ 4 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\ -7.5 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & &= a - b + c \end{aligned}$$

Aus dem Punkt A folgt direkt $c = -2$. Eingesetzt in die beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a + 2b - 2 = 4 && \mid +2 \\ & 4a + 2b = 6 \\ \text{II} \quad & a - b - 2 = -7.5 && \mid +2 \\ & a - b = -5.5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -5.5 \end{array}\right) \qquad 4 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -28 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6b = -28 && \mid :(-6) \\ & b = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a + 2 \cdot \frac{14}{3} = 6 && \mid -\frac{28}{3} \\ & 4a = -\frac{10}{3} && \mid :4 \\ & a = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{14}{3}x - 2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $A(-2 \mid 3)$, $B(0.5 \mid -4.5)$, $C(4 \mid 16.5)$

$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c &&= 4a - 2b + c \\ -4.5 &= a \cdot 0.5^2 + b \cdot 0.5 + c &&= 0.25a + 0.5b + c \\ 16.5 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &&= 16a + 4b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 1 & -4.5 \\ 16 & 4 & 1 & 16.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 16 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 15 & -75 \\ 0 & 12 & -3 & 4.5 \end{array}\right) \quad 5 \cdot \text{III} - 6 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 15 & -75 \\ 0 & 0 & -105 & 472.5 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -105c = 472.5 && \mid :(-105) \\ & c = -4.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 10b - 4.5 \cdot 15 = -75 && \mid +67.5 \\ & 10b = -7.5 && \mid :10 \\ & b = -0.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a - 2 \cdot (-0.75) - 4.5 = 3 && \mid +3 \\ & 4a = 6 && \mid :4 \\ & a = 1.5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1.5x^2 - 0.75x - 4.5$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $A(1 \mid 7)$, $B(-2 \mid 4)$, $C(3 \mid -11)$

$$\begin{aligned} 7 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & &= a + b + c \\ 4 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & &= 4a - 2b + c \\ -11 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & -11 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & -3 & -24 \\ 0 & -6 & -8 & -74 \end{array}\right) \quad \text{III} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -5c = -50 && \mid :(-5) \\ & c = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6b - 3 \cdot 10 = -24 && \mid +30 \\ & -6b = 6 && \mid :(-6) \\ & b = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & a - 1 + 10 = 7 && \mid -9 \\ & a = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^2 - x + 10$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $A(4 \mid 3)$, $B(-1 \mid -2)$, $C(3 \mid 0)$

$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & &= 16a + 4b + c \\ -2 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & &= a - b + c \\ 0 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 16 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 16 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -20 & 15 & -35 \\ 0 & 12 & 7 & -27 \end{array}\right) \quad 5 \cdot \text{III} + 3 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -20 & 15 & -35 \\ 0 & 0 & 80 & -240 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 80c = -240 && \mid :80 \\ & c = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -20b + 15 \cdot (-3) = -35 && \mid +45 \\ & -20b = 10 && \mid :(-20) \\ & b = -0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 16a + 4 \cdot (-0.5) - 3 = 3 && \mid +5 \\ & 16a = 8 && \mid :16 \\ & a = 0.5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.5x^2 - 0.5x - 3$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $A(3 \mid 7.5)$, $B(2 \mid 9)$, $C(5 \mid -13.5)$

$$\begin{aligned} 7.5 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \\ 9 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\ -13.5 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c & &= 25a + 5b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 7.5 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 25 & 5 & 1 & -13.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 9 \cdot \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ 9 \cdot \text{III} - 25 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 7.5 \\ 0 & 6 & 5 & 51 \\ 0 & -30 & -16 & -309 \end{array}\right) \quad \text{III} + 5 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 7.5 \\ 0 & 6 & 5 & 51 \\ 0 & 0 & 9 & -54 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 9c = -54 && \mid :9 \\ & c = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 6b + 5 \cdot (-6) = 51 && \mid +30 \\ & 6b = 81 && \mid :6 \\ & b = 13.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 9a + 3 \cdot 13.5 - 6 = 7.5 && \mid -34.5 \\ & 9a = -27 && \mid :9 \\ & a = -3 \\ & \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 13.5x - 6 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**