DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe LmFvx2

In einem Skigebiet wird eine Schneekanone eingesetzt, um eine Piste morgens schnell befahrbar zu machen. Die Netto-Schneemenge (Produktion minus Schmelz-/Verwehungsverluste) wird für einen bestimmten Tag vereinfacht durch eine Funktion $S(t)$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 06:00 Uhr (also $t = 0$ entspricht 06:00 Uhr) und $S(t)$ die Netto-Schneemenge in beliebigen Einheiten.
Für den Zeitraum $0 \leq t \leq 5$ gilt näherungsweise: $S(t) = -0.5t^4 + 5.5t^3 - 19.5t^2 + 22.5t$

a) Bestimmen Sie die Uhrzeiten, zu denen die Schneekanone netto keinen Beitrag liefert. Beschreiben Sie kurz, was diese Zeitpunkte im Ablauf bedeuten könnten.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5t^4 + 5.5t^3 - 19.5t^2 + 22.5t \\ &= t(-0.5t^3 + 5.5t^2 - 19.5t + 22.5) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5t^3 + 5.5t^2 - 19.5t + 22.5 \quad | \, :(-0.5) \\ &= t^3 - 11t^2 + 39t - 45 \quad | \, t_2 = 3 \end{aligned}$$

	1	−11	39	−45
3		3	−24	45
	1	−8	15	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 8t + 15 \\ t_{3/4} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 15} \\ t_3 &= 5 \quad \vee \quad t_4 = 3 \end{aligned}$$

$t = 3$ ist eine doppelte Nullstelle. Die Nullstellen $t = 0$, $t = 3$ und $t = 5$ entsprechen den Uhrzeiten 06:00 Uhr, 09:00 Uhr und 11:00 Uhr.

Deutung:

- Um 06:00 Uhr startet der Einsatz, daher ist die Netto-Schneemenge zunächst 0.
- Um 09:00 Uhr ist der Netto-Beitrag kurzfristig ebenfalls 0. Hier könnten sich Produktion und Verluste gerade ausgleichen.
- Um 11:00 Uhr liefert die Schneekanone netto wieder keinen Beitrag mehr. Dies kann das Ende des sinnvollen Einsatzzeitraums markieren.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Ermitteln Sie die Uhrzeiten, an denen sich der Netto-Verlauf von „zunehmend“ zu „abnehmend“ (oder umgekehrt) ändert. Deuten Sie diese Stellen als „kritische Phasen“ für die Einsatzplanung, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus a) ergänzen.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen und der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten und t rechnen.

$$S'(t) = -2t^3 + 16.5t^2 - 39t + 22.5$$
$$S''(t) = -6t^2 + 33t - 39$$

notw. Bed.: $S'(t) = 0$

$$0 = -2t^3 + 16.5t^2 - 39t + 22.5 \quad | \, t_1 = 3$$

	-2	$\frac{33}{2}$	-39	$\frac{45}{2}$
3		-6	$\frac{63}{2}$	$-\frac{45}{2}$
	-2	$\frac{21}{2}$	$-\frac{15}{2}$	0

$$\begin{aligned} 0 &= -2t^2 + 10.5t - 7.5 && | :(-2) \\ &= t^2 - 5.25t + 3.75 \\ t_{2/3} &= 2.625 \pm \sqrt{2.625^2 - 3.75} \\ t_2 &\approx 4.397 \quad \vee \quad t_3 \approx 0.853 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $S'(t) = 0 \quad \wedge \quad S''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} S''(3) &= -6 \cdot 3^2 + 33 \cdot 3 - 39 = 6 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ S''(4.397) &\approx -9.901 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ S''(0.853) &\approx -15.217 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $S(t) = y$

$$\begin{aligned} S(3) &= 0 && \Rightarrow \text{TP}(3 \mid 0) \\ S(4.397) &\approx 2.587 && \Rightarrow \text{HP}_2(4.4 \mid 2.59) \\ S(0.853) &\approx 8.153 && \Rightarrow \text{HP}_1(0.85 \mid 8.15) \end{aligned}$$

Deutung:

- Gegen 06:51 Uhr ($t \approx 0.853$) liegt zunächst ein lokaler Hochpunkt vor: Hier ist der Netto-Beitrag vorübergehend besonders groß.
- Um 09:00 Uhr ($t = 3$) liegt ein lokaler Tiefpunkt mit $S(3) = 0$ vor: Das ist eine kritische Phase, weil die Schneekanone in diesem Moment netto nichts gewinnt.
- Gegen 10:24 Uhr ($t \approx 4.397$) wird nochmals ein kleinerer Hochpunkt erreicht, bevor der Netto-Beitrag bis 11:00 Uhr wieder auf 0 sinkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Finden Sie die Uhrzeiten, an denen sich der Verlauf spürbar im Charakter verändert (Übergang von „immer steiler“ zu „immer flacher“ oder umgekehrt).

$$S''(t) = -6t^2 + 33t - 39$$
$$S'''(t) = -12t + 33$$

notw. Bed.: $S''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6t^2 + 33t - 39 && | :(-6) \\ &= t^2 - 5.5t + 6.5 \\ t_{1/2} &= 2.75 \pm \sqrt{2.75^2 - 6.5} \\ t_1 &\approx 1.719 \quad \vee \quad t_2 \approx 3.781 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $S''(t) = 0 \quad \wedge \quad S'''(t) \neq 0$

$$S'''(1.719) = -12 \cdot 1.719 + 33 = 12.372 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$S'''(3.781) = -12 \cdot 3.781 + 33 = -12.372 \neq 0 \qquad \checkmark$$

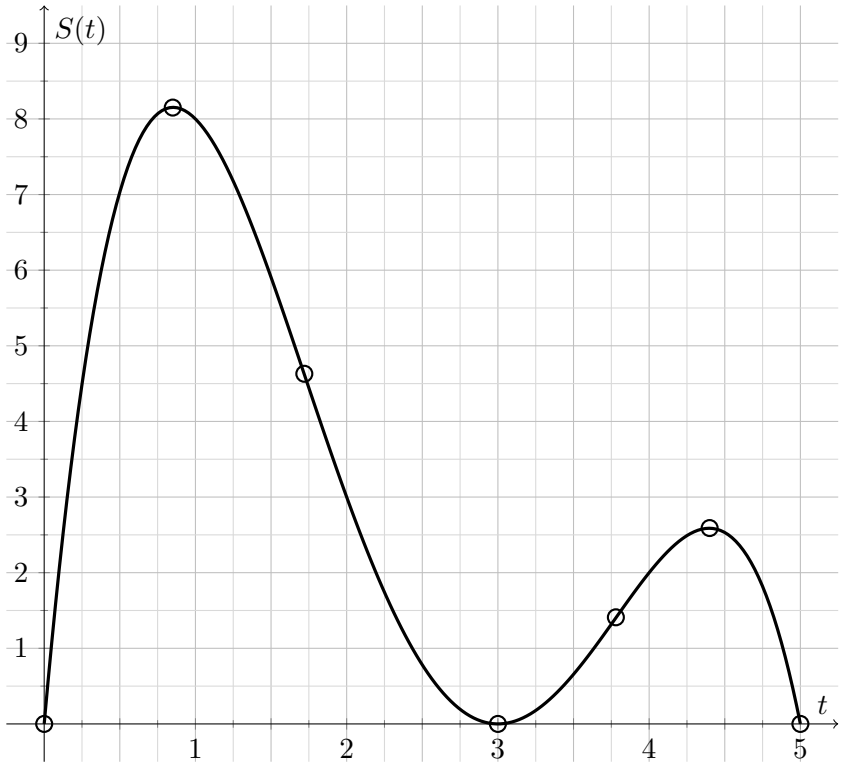
y-Wert: $S(t) = y$

$$S(1.719) \approx 4.628 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.72 \mid 4.63)$$
$$S(3.781) \approx 1.406 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3.78 \mid 1.41)$$

Die zugehörigen Uhrzeiten sind:

$$t \approx 1.719 \qquad \Rightarrow \text{ca. 07:43 Uhr}$$
$$t \approx 3.781 \qquad \Rightarrow \text{ca. 09:47 Uhr}$$

d) Skizzieren Sie den Verlauf im Intervall $[0; 5]$ und markieren Sie die in a)–c) gefundenen Stellen des Graphen, indem Sie diese einkreisen.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**