DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe KfJeWE

Für einen neuen Thermobecher soll die Innenform so geplant werden, dass er gut in der Hand liegt, stabil steht und gleichzeitig ausreichend Volumen bietet. In der Konstruktion wird der Querschnitt des Bechers in einem Koordinatensystem betrachtet: Die x-Achse beschreibt die Höhe im Becher (in cm) vom Boden nach oben, und $f(x)$ gibt den Innenradius (ebenfalls in cm) an.
Damit lässt sich der Innenraum des Bechers als Rotationskörper modellieren: Dreht man den Graphen von $f(x)$ um die x-Achse, entsteht die räumliche Form des Becherinneren. So kann später rechnerisch überprüft werden, wie groß das Fassungsvermögen ist und wie sich die Form über die Höhe verändert.
Der Radius des Becherinneren wird in diesem Modell beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{300}x^3 - \frac{7}{80}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{7}{2}$$

Der betrachtete Bereich reicht dabei vom Becherboden bis zur vorgesehenen Füllhöhe, also für $0 \leq x \leq 12$.

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zum Thermobecher.

a) Bestimmen Sie den Innendurchmesser am Becherboden und deuten Sie, was dieser Wert für die Standstabilität bedeutet.

Am Becherboden gilt $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{300} \cdot 0^3 - \frac{7}{80} \cdot 0^2 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{7}{2} = 3.5 \\ D_{\text{Boden}} &= 2 \cdot 3.5 = 7 \end{aligned}$$

Der Innendurchmesser am Boden beträgt 7 cm. Das spricht für eine recht stabile Standfläche, weil der Becher unten nicht zu schmal ist.

b) Bestimmen Sie den Innendurchmesser an der Öffnung (bei $x = 12$) und erläutern Sie kurz, welche praktische Bedeutung dieser Durchmesser z. B. fürs Trinken bzw. Reinigen hat.

$$\begin{aligned} f(12) &= \frac{1}{300} \cdot 12^3 - \frac{7}{80} \cdot 12^2 + \frac{3}{5} \cdot 12 + \frac{7}{2} \\ &= 5.76 - 12.6 + 7.2 + 3.5 \\ &= 3.86 \\ D_{\text{Öffnung}} &= 2 \cdot 3.86 = 7.72 \end{aligned}$$

Der Innendurchmesser an der Öffnung beträgt 7.72 cm. Eine so weite Öffnung macht das Trinken angenehm und erleichtert das Reinigen des Bechers.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ermitteln Sie, bei welcher Höhe der Becher innen am breitesten ist und wie groß dort der maximale Innendurchmesser ist.

$$f'(x) = 0.01x^2 - 0.175x + 0.6$$
$$f''(x) = 0.02x - 0.175$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.01x^2 - 0.175x + 0.6 \quad | :0.01 \\ 0 &= x^2 - 17.5x + 60 \\ x_{1/2} &= 8.75 \pm \sqrt{8.75^2 - 60} \\ x_1 &\approx 12.82 \quad \vee \quad x_2 \approx 4.68 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 12]$ liegt nur $x_2 \approx 4.68$.

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(4.68) = 0.02 \cdot 4.68 - 0.175 = -0.0814 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(4.68) \approx 4.733 \qquad \Rightarrow \text{HP}(4.68 \mid 4.73)$$

Die Randwerte $f(0) = 3.5$ und $f(12) = 3.86$ sind kleiner. Der Becher ist innen also in einer Höhe von ungefähr 4.68 cm am breitesten. Der maximale Innendurchmesser beträgt dort ungefähr $2 \cdot 4.733 \approx 9.47$ cm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie das Volumen des Innenraums bis zur Füllhöhe als Rotationsvolumen (Rotation um die x-Achse) und geben Sie das Ergebnis in Milliliter an und beurteilen Sie, ob der Thermobecher damit eher in Richtung „kleiner Coffee-to-go“ oder „großer Becher“ geht.

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 &= \left(\frac{1}{300}x^3 - \frac{7}{80}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{7}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{300}x^3 - \frac{7}{80}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{300}x^3 - \frac{7}{80}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{7}{2}\right) \\
&= \frac{1}{90000}x^6 - \frac{7}{24000}x^5 + \frac{1}{500}x^4 + \frac{7}{600}x^3 \\
&\quad - \frac{7}{24000}x^5 + \frac{49}{6400}x^4 - \frac{21}{400}x^3 - \frac{49}{160}x^2 \\
&\quad + \frac{1}{500}x^4 - \frac{21}{400}x^3 + \frac{9}{25}x^2 + \frac{21}{10}x \\
&\quad + \frac{7}{600}x^3 - \frac{49}{160}x^2 + \frac{21}{10}x + \frac{49}{4} \\
&= \frac{1}{90000}x^6 - \frac{7}{12000}x^5 + \frac{373}{32000}x^4 - \frac{49}{600}x^3 - \frac{101}{400}x^2 + \frac{21}{5}x + \frac{49}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{12} f(x)^2\,dx \\
&= \pi \int_0^{12} \left(\frac{1}{90000}x^6 - \frac{7}{12000}x^5 + \frac{373}{32000}x^4 - \frac{49}{600}x^3 - \frac{101}{400}x^2 + \frac{21}{5}x + \frac{49}{4}\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{630000}x^7 - \frac{7}{72000}x^6 + \frac{373}{160000}x^5 - \frac{49}{2400}x^4 - \frac{101}{1200}x^3 + \frac{21}{10}x^2 + \frac{49}{4}x\right]_0^{12} \\
&= \pi\Big(\frac{1}{630000}\cdot 12^7 - \frac{7}{72000}\cdot 12^6 + \frac{373}{160000}\cdot 12^5 - \frac{49}{2400}\cdot 12^4 \\
&\qquad - \frac{101}{1200}\cdot 12^3 + \frac{21}{10}\cdot 12^2 + \frac{49}{4}\cdot 12 - 0\Big) \\
&= \frac{994269}{4375}\pi \approx 713.963
\end{aligned}$$

Da $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{ml}$ gilt, beträgt das Volumen des Innenraums ungefähr 714 ml. Damit geht der Thermobecher eher in Richtung „großer Becher“ und nicht in Richtung „kleiner Coffee-to-go“.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**