DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe KWhp4s

Eine Agentur testet eine Online-Anzeige über fünf Wochen hinweg ($0 \le x \le 5$). Für die Auswertung wird die Klickrate in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet. Die Klickrate (in %) wird näherungsweise durch die Funktion $k(x) = -0.5x^3 + 4.25x^2 - 10.25x + 7.5$ modelliert.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte und deuten Sie diese im Sachzusammenhang.

$$k'(x) = -1.5x^2 + 8.5x - 10.25$$
$$k''(x) = -3x + 8.5$$

notw. Bed.: $k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -1.5x^2 + 8.5x - 10.25 \quad | :(-1.5) \\ &= x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{41}{6} \\ x_{1/2} &= \frac{17}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 - \frac{41}{6}} \\ &= \frac{17}{6} \pm \frac{\sqrt{43}}{6} \\ x_1 \approx 3.926 \quad &\vee \quad x_2 \approx 1.740 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k'(x) = 0 \quad \wedge \quad k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k''(3.926) &= -3 \cdot 3.926 + 8.5 = -3.278 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ k''(1.740) &= -3 \cdot 1.740 + 8.5 = 3.28 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $k(x) = y$

$$\begin{aligned} k(3.926) &= -0.5 \cdot 3.926^3 + 4.25 \cdot 3.926^2 - 10.25 \cdot 3.926 + 7.5 \\ &\approx 2.509 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3.93 \mid 2.51) \\ k(1.740) &= -0.5 \cdot 1.740^3 + 4.25 \cdot 1.740^2 - 10.25 \cdot 1.740 + 7.5 \\ &\approx -0.102 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1.74 \mid -0.1) \end{aligned}$$

Der Hochpunkt bedeutet im Sachzusammenhang: Nach etwa 3.93 Wochen ist die Klickrate mit ungefähr 2.51 % lokal am größten.

Der Tiefpunkt bedeutet: Nach etwa 1.74 Wochen ist die Klickrate am kleinsten. Der Wert -0.1 % ist rechnerisch negativ, das Modell beschreibt die Klickrate in diesem Bereich also nur ungenau.

b) Prüfen Sie ohne Rechnung, ob es noch höhere Werte im Verlauf der Kampagne gibt. Welche Auswirkung hat dies auf Ihre Aussage von a)?

Ohne weitere Rechnung kann man die Randwerte des Intervalls betrachten. Zu Beginn gilt

$$k(0) = 7.5$$

Dieser Wert ist bereits deutlich größer als der Hochpunkt aus Teilaufgabe a).

Damit gibt es im Verlauf der Kampagne noch höhere Werte. Der in Teilaufgabe a) bestimmte Hochpunkt ist also nur ein lokaler Hochpunkt, aber nicht der größte Wert im gesamten Intervall.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Bestimmen Sie die Nullstellen von $k(x)$ und erläutern Sie, was diese Werte im Kontext aussagen könnten.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{aligned}
0 &= -0.5x^3 + 4.25x^2 - 10.25x + 7.5 && | :(-0.5)\\
&= x^3 - 8.5x^2 + 20.5x - 15 && | \, x_1 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{41}{2} & -15 \\
2 & & 2 & -13 & 15 \\
\hline
 & 1 & -\frac{13}{2} & \frac{15}{2} & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 6.5x + 7.5\\
x_{2/3} &= 3.25 \pm \sqrt{3.25^2 - 7.5}\\
x_2 &= 5 \quad \vee \quad x_3 = 1.5
\end{aligned}$$

Im Sachzusammenhang könnten diese Werte bedeuten, dass zu diesen Zeitpunkten (nach 1.5, 2 und 5 Wochen) die modellierte Klickrate bei 0 % liegt, also rechnerisch keine Klicks mehr auftreten.

d) Für welche Werte von x ist die Klickrate größer als 1 %? Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise für die Berechnung dieser Werte.

Zunächst setzt man $k(x) = 1$, denn gesucht sind die Zeitpunkte, an denen die Klickrate genau 1 % beträgt. Diese Stellen trennen die Bereiche mit $k(x) > 1$ und $k(x) < 1$.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{aligned}
k(x) &= 1 && | \, -k(x)\\
0 &= 1 - k(x)\\
&= 1 - (-0.5x^3 + 4.25x^2 - 10.25x + 7.5)\\
&= 0.5x^3 - 4.25x^2 + 10.25x - 6.5 && | :0.5\\
&= x^3 - 8.5x^2 + 20.5x - 13 && | \, x_1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{41}{2} & -13 \\
1 & & 1 & -\frac{15}{2} & 13 \\
\hline
 & 1 & -\frac{15}{2} & 13 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 7.5x + 13\\
x_{2/3} &= 3.75 \pm \sqrt{3.75^2 - 13}\\
x_2 &\approx 4.781 \quad \vee \quad x_3 \approx 2.719
\end{aligned}$$

An diesen drei Stellen nimmt die Klickrate genau den Wert 1 % an, dazwischen wechselt sie jeweils zwischen Werten über und unter 1 %. Wegen $k(0) = 7.5 > 1$ liegt sie zu Beginn über 1 %. Die Klickrate ist also von $x = 0$ bis $x = 1$ sowie von $x \approx 2.72$ bis $x \approx 4.78$ größer als 1 %.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**