DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe JQGRNP

Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen im angegebenen Intervall. Falls sich die Graphen im Intervall schneiden, muss sinnvoll geteilt werden.

a) $f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = 3x + 1 \qquad \text{Intervall } [0; 3]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 + 1 - (3x + 1) \\ &= x^2 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 3x \\ &= x(x - 3) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x - 3 && | \; +3 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind die Intervallgrenzen, im Intervall muss also nicht geteilt werden.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 1.5x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 1.5 \cdot 3^2 - 0 = -4.5 \end{aligned}$$

$$A = |A_1| = |-4.5| = 4.5$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3 \qquad g(x) = 1 \qquad \text{Intervall } [-2; 4]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.5x^2 + 3 - 1 \\ &= -0.5x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5x^2 + 2 && | +0.5x^2 \\ 0.5x^2 &= 2 && | :0.5 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{2} (-0.5x^2 + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2) \right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{2}^{4} (-0.5x^2 + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_{2}^{4} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - \left(-\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 \right) = -\frac{8}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \frac{16}{3} \right| + \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{32}{3} \approx 10.667$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^3 - 3x \qquad g(x) = -x \qquad$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 3x - (-x) \\ &= x^3 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x \\ &= x(x^2 - 2) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 && | \; +2 \\ x^2 &= 2 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

Da die Differenzfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 - 0 = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^3 - 2x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2\right) = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$A = 2 \cdot (|A_1| + |A_2|) = 2 \cdot (|-1| + |1|) = 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 0.2x^3 - x \qquad g(x) = 0.4x \qquad \text{Intervall } [0;5]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0.2x^3 - x - 0.4x \\ &= 0.2x^3 - 1.4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.2x^3 - 1.4x \\ &= x(0.2x^2 - 1.4) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.2x^2 - 1.4 && | \; +1.4 \\ 0.2x^2 &= 1.4 && | \; :0.2 \\ x^2 &= 7 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{7} \approx 2.646 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{7} \approx -2.646 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0;5]$ liegt nur die Schnittstelle $x_2 = \sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\sqrt{7}} (0.2x^3 - 1.4x)\, dx \\ &= \Big[0.05x^4 - 0.7x^2\Big]_0^{\sqrt{7}} \\ &= 0.05 \cdot (\sqrt{7})^4 - 0.7 \cdot (\sqrt{7})^2 - 0 = 2.45 - 4.9 = -2.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\sqrt{7}}^{5} (0.2x^3 - 1.4x)\, dx \\ &= \Big[0.05x^4 - 0.7x^2\Big]_{\sqrt{7}}^{5} \\ &= 0.05 \cdot 5^4 - 0.7 \cdot 5^2 - \Big(0.05 \cdot (\sqrt{7})^4 - 0.7 \cdot (\sqrt{7})^2\Big) = 13.75 - (-2.45) = 16.2 \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |-2.45| + |16.2| = 18.65$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -x^2 + 6 \qquad g(x) = x^2 - 2 \qquad$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^2 + 6 - (x^2 - 2) \\ &= -x^2 + 6 - x^2 + 2 \\ &= -2x^2 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^2 + 8 && | +2x^2 \\ 2x^2 &= 8 && | :2 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind die Intervallgrenzen, im Intervall muss also nicht geteilt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 8 \cdot (-2) \right) = \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{64}{3} \approx 21.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6 \qquad g(x) = -2x + 6 \qquad$ Intervall $[1;5]$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 2x^2 - 8x + 6 - (-2x + 6) \\ &= 2x^2 - 8x + 6 + 2x - 6 \\ &= 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 6x \\ &= x(2x - 6) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 6 && \mid +6 \\ 2x &= 6 && \mid :2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Im Intervall $[1;5]$ liegt nur die Schnittstelle $x_2 = 3$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^3 (2x^2 - 6x)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_1^3 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2\right) = -9 - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_3^5 (2x^2 - 6x)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_3^5 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2\right) = \frac{25}{3} - (-9) = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|-\frac{20}{3}\right| + \left|\frac{52}{3}\right| = 24$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**