DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe JQCS7Y

Bestimmen Sie für jedes Funktionenpaar die Schnittpunkte der beiden Graphen und berechnen Sie anschließend den geometrischen Flächeninhalt, der zwischen den Graphen im Bereich vom linken bis zum rechten Schnittpunkt eingeschlossen wird. (Bei drei Schnittpunkten entstehen in der Regel zwei Teilflächen.)

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1 \qquad g(x) = x + 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - x^2 - 5x + 1 - (x + 1) \\ &= x^3 - x^2 - 5x + 1 - x - 1 \\ &= x^3 - x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x^2 - 6x \\ &= x(x^2 - x - 6) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -2, 0 und 3. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$\begin{aligned} g(-2) &= -2 + 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(-2 \mid -1) \\ g(0) &= 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0 \mid 1) \\ g(3) &= 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P_3(3 \mid 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-2}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 - 0 \\
&= -\frac{63}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{16}{3}\right| + \left|-\frac{63}{4}\right| \\
&= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12 \qquad g(x) = -2x + 4$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 5x^2 + 12 - (-2x + 4) \\ &= x^3 - 5x^2 + 12 + 2x - 4 \\ &= x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$0 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8}$$

$$x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -1, 2 und 4. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$g(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad P_1(-1 \mid 6)$$
$$g(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2(2 \mid 0)$$
$$g(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -4 \quad \Rightarrow \quad P_3(4 \mid -4)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 8 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{5}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 8 \cdot (-1)\right) \\ &= \frac{32}{3} - \left(-\frac{61}{12}\right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_2^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x\right]_2^4 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{5}{3}\cdot 4^3 + 4^2 + 8\cdot 4 - \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{5}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 8\cdot 2\right) \\
&= \frac{16}{3} - \frac{32}{3} \\
&= -\frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\
&= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 5x + 4 \qquad g(x) = 0.5x^2 - 2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 1.5x^2 - 5x + 4 - (0.5x^2 - 2) \\ &= x^3 - 1.5x^2 - 5x + 4 - 0.5x^2 + 2 \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$$x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -2, 1 und 3. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$\begin{aligned} g(-2) = 0.5 \cdot (-2)^2 - 2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad P_1(-2 \mid 0) \\ g(1) = 0.5 \cdot 1^2 - 2 = -1.5 \quad &\Rightarrow \quad P_2(1 \mid -1.5) \\ g(3) = 0.5 \cdot 3^2 - 2 = 2.5 \quad &\Rightarrow \quad P_3(3 \mid 2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{5}{2} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) \right) \\ &= \frac{37}{12} - \left(-\frac{38}{3} \right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 - \frac{5}{2}\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right) \\
&= -\frac{9}{4} - \frac{37}{12} \\
&= -\frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\
&= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \qquad g(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 1 - (-x^2 + 3x + 1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 1 + x^2 - 3x - 1 \\ &= x^3 - x^2 - 2x \\ 0 &= x^3 - x^2 - 2x \\ &= x(x^2 - x - 2) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - x - 2 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -1, 0 und 2. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad P_1(-1 \mid -3) \\ g(0) &= -0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0 \mid 1) \\ g(2) &= -2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad P_3(2 \mid 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{5}{12} \right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2 - 0 \\
&= -\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{5}{12}\right| + \left|-\frac{8}{3}\right| \\
&= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{37}{12} \approx 3.083
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 13 \qquad g(x) = x^2 - 4x + 2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 8x^2 + 19x - 13 - (x^2 - 4x + 2) \\ &= x^3 - 8x^2 + 19x - 13 - x^2 + 4x - 2 \\ &= x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \quad | \, x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 23 & -15 \\ 1 & & 1 & -8 & 15 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 - 8x + 15$$

$$0 = x^2 - 8x + 15$$

$$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 15}$$

$$x_2 = 5 \quad \vee \quad x_3 = 3$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach 1, 3 und 5. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$\begin{aligned} g(1) &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(1 \mid -1) \\ g(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(3 \mid -1) \\ g(5) &= 5^2 - 4 \cdot 5 + 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad P_3(5 \mid 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 + \frac{23}{2} \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 + \frac{23}{2} \cdot 1^2 - 15 \cdot 1\right) \\ &= -\frac{9}{4} - \left(-\frac{25}{4}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_3^5 (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x\right]_3^5 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 5^4 - 3\cdot 5^3 + \frac{23}{2}\cdot 5^2 - 15\cdot 5 - \left(\frac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^3 + \frac{23}{2}\cdot 3^2 - 15\cdot 3\right) \\
&= -\frac{25}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) \\
&= -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= |4| + |-4| \\
&= 4 + 4 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 7x + 8 \qquad g(x) = -0.5x^2 + 2$

$$\begin{aligned}
d(x) &= f(x) - g(x) \\
&= x^3 - 0.5x^2 - 7x + 8 - (-0.5x^2 + 2) \\
&= x^3 - 0.5x^2 - 7x + 8 + 0.5x^2 - 2 \\
&= x^3 - 7x + 6 \\
0 &= x^3 - 7x + 6 \quad | \, x_1 = 1
\end{aligned}$$

	1	0	−7	6
1		1	1	−6
	1	1	−6	0

$$\begin{aligned}
\Rightarrow q(x) &= x^2 + x - 6 \\
0 &= x^2 + x - 6 \\
x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\
x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -3
\end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -3, 1 und 2. Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen in g:

$$\begin{aligned}
g(-3) &= -0.5 \cdot (-3)^2 + 2 = -2.5 \quad \Rightarrow \quad P_1(-3 \mid -2.5) \\
g(1) &= -0.5 \cdot 1^2 + 2 = 1.5 \quad \Rightarrow \quad P_2(1 \mid 1.5) \\
g(2) &= -0.5 \cdot 2^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_3(2 \mid 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{1} (x^3 - 7x + 6)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{1} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{7}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 - \frac{7}{2} \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3)\right) \\
&= \frac{11}{4} - \left(-\frac{117}{4}\right) \\
&= 32
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (x^3 - 7x + 6)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{7}{2}\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{7}{2}\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right) \\
&= 2 - \frac{11}{4} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= |32| + \left|-\frac{3}{4}\right| \\
&= 32 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{131}{4} = 32.75
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**