DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe HnhYnk

In einer Werkstatt wird Acrylglas mit einem Lasercutter geschnitten. Dabei hängt die Qualität der Schnittkante von mehreren Einstellungen (Leistung, Fokus, Vorschub) ab. Aus Messungen wird eine Größe $Q(x)$ gebildet, die die Abweichung zur idealen Kante beschreibt:

- $Q(x) = 0$: Schnittkante ist genau im Idealbereich
- $Q(x) > 0$: Kante ist zu stark belastet (z. B. Schmauchspuren)
- $Q(x) < 0$: Kante ist zu schwach bearbeitet (z. B. Gratbildung)

Für einen Testlauf wird $Q(x)$ (in willkürlichen Einheiten) in Abhängigkeit von x (in dm) mit $0 \leq x \leq 6$ modelliert durch:

$$Q(x) = 0.2x^3 - 1.7x^2 + 3.7x - 1.2$$

a) Bestimmen Sie die Punkte, zu denen $Q(x) = 0$ gilt. Erklären Sie, was diese Maße konkret für den Schneidprozess bedeuten.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.2x^3 - 1.7x^2 + 3.7x - 1.2 && \mid :0.2 \\ &= x^3 - 8.5x^2 + 18.5x - 6 && \mid x_1 = 3 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{37}{2} & -6 \\ 3 & & 3 & -\frac{33}{2} & 6 \\ \hline & 1 & -\frac{11}{2} & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5.5x + 2 \\ x_{2/3} &= 2.75 \pm \sqrt{2.75^2 - 2} \\ x_2 \approx 5.108 \quad &\vee \quad x_3 \approx 0.392 \\ \Rightarrow S_{x1}(3 \mid 0), \quad &S_{x2}(5.11 \mid 0), \quad S_{x3}(0.39 \mid 0) \end{aligned}$$

Bei den Maßen $x \approx 0.39\,\text{dm}$, $x = 3\,\text{dm}$ und $x \approx 5.11\,\text{dm}$ liegt die Schnittkante jeweils genau im Idealbereich, ist also weder zu stark belastet noch zu schwach bearbeitet.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Untersuchen Sie (auch an den Randpunkten des betrachteten Intervalls), bei welchen Maßen die Abweichung besonders groß (zu stark / zu schwach) ist und beschreiben Sie, welche Art von Problem dort jeweils vorliegt.

$$Q'(x) = 0.6x^2 - 3.4x + 3.7$$
$$Q''(x) = 1.2x - 3.4$$

notw. Bed.: $Q'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.6x^2 - 3.4x + 3.7 && | :0.6 \\ &= x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{37}{6} \\ x_{1/2} &= \frac{17}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 - \frac{37}{6}} \\ x_1 &\approx 4.198 \quad \vee \quad x_2 \approx 1.469 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $Q'(x) = 0 \quad \wedge \quad Q''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} Q''(4.198) &= 1.2 \cdot 4.198 - 3.4 \approx 1.638 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ Q''(1.469) &= 1.2 \cdot 1.469 - 3.4 \approx -1.637 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $Q(x) = y$

$$\begin{aligned} Q(4.198) &\approx -0.830 && \Rightarrow \text{TP}(4.2 \mid -0.83) \\ Q(1.469) &\approx 1.201 && \Rightarrow \text{HP}(1.47 \mid 1.2) \end{aligned}$$

Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$:

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0.2 \cdot 0^3 - 1.7 \cdot 0^2 + 3.7 \cdot 0 - 1.2 = -1.2 \\ Q(6) &= 0.2 \cdot 6^3 - 1.7 \cdot 6^2 + 3.7 \cdot 6 - 1.2 = 3 \end{aligned}$$

Die größte positive Abweichung im Intervall liegt bei $x = 6$ mit $Q(6) = 3$, also ist die Kante dort am stärksten „zu stark belastet“ (Schmauchspuren).

Die größte negative Abweichung im Intervall liegt bei $x = 0$ mit $Q(0) = -1.2$, also ist die Kante dort am stärksten „zu schwach bearbeitet“ (Gratbildung).

Zusätzlich liegt bei $x \approx 1.47$ ein lokaler Hochpunkt mit zu starker Belastung vor und bei $x \approx 4.2$ ein lokaler Tiefpunkt mit zu schwacher Bearbeitung.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Der Werkstattleiter interessiert sich besonders für Abschnitte, an denen sich das Verhalten „spürbar ändert“, weil dort häufig nachjustiert werden muss. Bestimmen Sie die Änderungsraten im Wendepunkt und an den Randpunkten des Intervalls und deuten Sie die Bedeutung dieser Stelle(n).

$$\begin{aligned} Q'(x) &= 0.6x^2 - 3.4x + 3.7 \\ Q''(x) &= 1.2x - 3.4 \\ Q'''(x) &= 1.2 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $Q''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 1.2x - 3.4 && \mid +3.4 \\ 1.2x &= 3.4 && \mid :1.2 \\ x &= \frac{17}{6} \approx 2.833 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $Q''(x) = 0 \quad \wedge \quad Q'''(x) \neq 0$

$$Q'''\left(\frac{17}{6}\right) = 1.2 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $Q(x) = y$

$$Q\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{5}{27} \approx 0.185 \qquad \Rightarrow \text{WP}(2.83 \mid 0.19)$$

Änderungsraten an den Randpunkten und im Wendepunkt:

$$\begin{aligned} Q'(0) &= 0.6 \cdot 0^2 - 3.4 \cdot 0 + 3.7 = 3.7 \\ Q'\left(\frac{17}{6}\right) &= 0.6 \cdot \left(\frac{17}{6}\right)^2 - 3.4 \cdot \frac{17}{6} + 3.7 = -\frac{67}{60} \approx -1.117 \\ Q'(6) &= 0.6 \cdot 6^2 - 3.4 \cdot 6 + 3.7 = 4.9 \end{aligned}$$

Im Wendepunkt ändert sich das Verhalten des Graphen spürbar. Die Abweichung nimmt dort noch ab, aber ab dieser Stelle wird die Abnahme nicht weiter stärker: Vor dem Wendepunkt fällt der Graph immer schneller, danach fällt er zunächst weiter, aber immer weniger stark. Solche Stellen sind für das Nachjustieren besonders wichtig, weil sich dort der Verlauf der Abweichung merklich verändert. Die Randwerte $Q'(0) = 3.7$ und $Q'(6) = 4.9$ zeigen außerdem, dass sich die Abweichung am Anfang und am Ende des Intervalls jeweils recht deutlich ändert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Ein Werkstück gilt als nicht mehr brauchbar, sobald die Abweichung mindestens 1 beträgt, also sobald $Q(x) \geq 1$ gilt. Bestimmen Sie alle Maßabschnitte im Bereich $0 \leq x \leq 6$, in denen das Werkstück nicht mehr brauchbar ist.

Gesucht sind alle x mit $Q(x) \geq 1$. Zuerst werden die Grenzen mit $Q(x) = 1$ bestimmt:

$$\begin{aligned} 0.2x^3 - 1.7x^2 + 3.7x - 1.2 &= 1 \quad | -1 \\ 0.2x^3 - 1.7x^2 + 3.7x - 2.2 &= 0 \quad | :0.2 \\ x^3 - 8.5x^2 + 18.5x - 11 &= 0 \quad | x_1 = 1 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{37}{2} & -11 \\ 1 & & 1 & -\frac{15}{2} & 11 \\ \hline & 1 & -\frac{15}{2} & 11 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 7.5x + 11 \\ x_{2/3} &= 3.75 \pm \sqrt{3.75^2 - 11} \\ x_2 &= 5.5 \quad \vee \quad x_3 = 2 \end{aligned}$$

Prüfen der Abschnitte mit je einem Wert:

$$\begin{aligned} Q(0) = -1.2 < 1 \quad &\Rightarrow \text{brauchbar für } 0 \leq x < 1 \\ Q(1.5) = 1.2 \geq 1 \quad &\Rightarrow \text{nicht brauchbar für } 1 \leq x \leq 2 \\ Q(3) = 0 < 1 \quad &\Rightarrow \text{brauchbar für } 2 < x < 5.5 \\ Q(6) = 3 \geq 1 \quad &\Rightarrow \text{nicht brauchbar für } 5.5 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Das Werkstück ist also in den Maßabschnitten $1 \leq x \leq 2$ und $5.5 \leq x \leq 6$ (in dm) nicht mehr brauchbar.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**