DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe GS4MFF

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 - 10x \\ h''(x) &= 12x^2 - 10 \\ h'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ 0 &= x^4 - 5x^2 + 4 && | \; x^2 = z \\ &= z^2 - 5z + 4 \\ z_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\ z_1 = 4 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\ x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 10x \\ &= x(4x^2 - 10) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 10 && | \; +10 \\ 4x^2 &= 10 && | \; :4 \\ x^2 &= 2.5 && | \; \sqrt{} \\ x_2 = \sqrt{2.5} \approx 1.581 \quad &\vee \quad x_3 = -\sqrt{2.5} \approx -1.581 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 10 = -10 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ h''(\sqrt{2.5}) &= 12 \cdot 2.5 - 10 = 20 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ h''(-\sqrt{2.5}) &= 12 \cdot 2.5 - 10 = 20 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h(0) &= 4 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 4) \\ h(\sqrt{2.5}) &= 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 4 = -2.25 && \Rightarrow \text{TP}_1(1.58 \mid -2.25) \\ h(-\sqrt{2.5}) &= 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 4 = -2.25 && \Rightarrow \text{TP}_2(-1.58 \mid -2.25) \end{aligned}$$

Wendepunkt

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 10 && | +10 \\ 12x^2 &= 10 && | :12 \\ x^2 &= \frac{5}{6} && | \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0.913 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{6}} \approx -0.913 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h'''\left(\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right) &\approx 21.909 \neq 0 \qquad \checkmark \\ h'''\left(-\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right) &\approx -21.909 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h\left(\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right) &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 4 = \frac{19}{36} \approx 0.528 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0.91 \mid 0.53) \\ h\left(-\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right) &= \frac{19}{36} \approx 0.528 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.91 \mid 0.53) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $h(x) = x^4 - 8x^2$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 - 16x \\ h''(x) &= 12x^2 - 16 \\ h'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ 0 &= x^4 - 8x^2 \\ &= x^2(x^2 - 8) && | \; x_1 = 0 \\ \\ 0 &= x^2 - 8 && | \; +8 \\ x^2 &= 8 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{8} \approx 2.828 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{8} \approx -2.828 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 16x \\ &= x(4x^2 - 16) && | \; x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 4x^2 - 16 && | \; +16 \\ 4x^2 &= 16 && | \; :4 \\ x^2 &= 4 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ h''(2) &= 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ h''(-2) &= 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 0) \\ h(2) &= 2^4 - 8 \cdot 2^2 = -16 && \Rightarrow \text{TP}_1(2 \mid -16) \\ h(-2) &= (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 = -16 && \Rightarrow \text{TP}_2(-2 \mid -16) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 16 && | \; +16 \\ 12x^2 &= 16 && | \; :12 \\ x^2 &= \frac{4}{3} && | \; \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.155 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1.155 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$h'''\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) \approx 27.713 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$h'''\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) \approx -27.713 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$h\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{80}{9} \approx -8.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.15 \mid -8.89)$$
$$h\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = -\frac{80}{9} \approx -8.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.15 \mid -8.89)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $h(x) = -x^4 + 4x^3$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -4x^3 + 12x^2 \\ h''(x) &= -12x^2 + 24x \\ h'''(x) &= -24x + 24 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ 0 &= -x^4 + 4x^3 \\ &= x^3(-x+4) \quad | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -x + 4 \quad | \, +x \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -4x^3 + 12x^2 \\ &= x^2(-4x+12) \quad | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -4x + 12 \quad | \, +4x \\ 4x &= 12 \quad | \, :4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= -12 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0 && \Rightarrow \text{hinr. Bed. nicht erfüllt} \\ h''(3) &= -12 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = -36 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Da $h'''(0) = 24 \neq 0$ ist, liegt bei $x = 0$ kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt vor (siehe Wendepunkt).

y-Wert: $h(x) = y$

$$h(3) = -3^4 + 4 \cdot 3^3 = 27 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3 \mid 27)$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -12x^2 + 24x \\ &= x(-12x+24) \quad | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -12x + 24 \quad | \, +12x \\ 12x &= 24 \quad | \, :12 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h'''(0) &= -24 \cdot 0 + 24 = 24 \neq 0 \qquad \checkmark \\ h'''(2) &= -24 \cdot 2 + 24 = -24 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

y-Wert: $h(x) = y$

$$h(0) = 0 \qquad \Rightarrow \text{SP}(0 \mid 0)$$
$$h(2) = -2^4 + 4 \cdot 2^3 = 16 \qquad \Rightarrow \text{WP}(2 \mid 16)$$

Der Wendepunkt bei $x = 0$ hat wegen $h'(0) = 0$ eine waagerechte Tangente und ist daher ein Sattelpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $h(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 - 8x \\ h''(x) &= 12x^2 - 8 \\ h'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ 0 &= x^4 - 4x^2 - 5 && | \ x^2 = z \\ &= z^2 - 4z - 5 \\ z_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 5} \\ z_1 &= 5 \quad \vee \quad z_2 = -1 && | \ x = \sqrt{z} \\ x_1 &= \sqrt{5} \approx 2.236 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{5} \approx -2.236 \end{aligned}$$

Für $z_2 = -1 < 0$ gibt es keine reellen Lösungen.

Extrempunkt
notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 8x \\ &= x(4x^2 - 8) && | \ x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 8 && | \ +8 \\ 4x^2 &= 8 && | \ :4 \\ x^2 &= 2 && | \ \sqrt{\ } \\ x_2 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ h''(\sqrt{2}) &= 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ h''(-\sqrt{2}) &= 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h(0) &= -5 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid -5) \\ h(\sqrt{2}) &= 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 && \Rightarrow \text{TP}_1(1.41 \mid -9) \\ h(-\sqrt{2}) &= 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 && \Rightarrow \text{TP}_2(-1.41 \mid -9) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 8 && | \ +8 \\ 12x^2 &= 8 && | \ :12 \\ x^2 &= \frac{2}{3} && | \ \sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0.816 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$h'''\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \approx 19.596 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$h'''\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \approx -19.596 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$h\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} - 5 = -\frac{65}{9} \approx -7.222 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0.82 \mid -7.22)$$
$$h\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = -\frac{65}{9} \approx -7.222 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.82 \mid -7.22)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**