DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe Esypne

Bestimmen Sie jeweils den Mittelwert m der Funktion im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = 2x - 3$ auf $[0; 5]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{5-0}\int_0^5 (2x-3)\,dx \\ &= \frac{1}{5}\left[x^2 - 3x\right]_0^5 \\ &= \frac{1}{5}\left(5^2 - 3\cdot 5 - 0\right) \\ &= \frac{1}{5}\cdot 10 = 2 \end{aligned}$$

b) $f(x) = -x^2 + 4x$ auf $[0; 4]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 (-x^2+4x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - 0\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.667 \end{aligned}$$

c) $f(x) = 0.5x^3 - x$ auf $[-1; 2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2 (0.5x^3 - x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[0.125x^4 - 0.5x^2\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(0.125\cdot 2^4 - 0.5\cdot 2^2 - \left(0.125\cdot(-1)^4 - 0.5\cdot(-1)^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(0 - (-0.375)\right) = 0.125 \end{aligned}$$

d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ auf $[-2; 1]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^1 (3x^2+2x+1)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[x^3 + x^2 + x\right]_{-2}^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(1^3 + 1^2 + 1 - \left((-2)^3 + (-2)^2 + (-2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(3 - (-6)\right) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -0.25x^3 + x^2 - 2$ auf $[0;4]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 (-0.25x^3 + x^2 - 2)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{16}\cdot 4^4 + \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - 0\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{2}{3} \approx -0.667 \end{aligned}$$

f) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ auf $[-1;1]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[0.2x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(0.2\cdot 1^5 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(0.2\cdot(-1)^5 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{15} - \left(-\frac{8}{15}\right)\right) = \frac{8}{15} \approx 0.533 \end{aligned}$$

g) $f(x) = -0.5x^4 + 2x^2$ auf $[0;2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 (-0.5x^4 + 2x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-0.1x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(-0.1\cdot 2^5 + \frac{2}{3}\cdot 2^3 - 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{15} = \frac{16}{15} \approx 1.067 \end{aligned}$$

h) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ auf $[0;2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 (-2x^3 + 3x^2 + 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-0.5x^4 + x^3 + x\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(-0.5\cdot 2^4 + 2^3 + 2 - 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x \qquad \text{auf } [-1;3]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-(-1)} \int_{-1}^{3} (0.25x^4 - x^2 + 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[0.05x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{1}{4} \left(0.05 \cdot 3^5 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 - \left(0.05 \cdot (-1)^5 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(12.15 - \frac{77}{60} \right) = \frac{163}{60} \approx 2.717 \end{aligned}$$

j) $f(x) = \sin(x) \qquad \text{auf } [0;\pi]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\pi - 0} \int_{0}^{\pi} \sin(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x) \right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\cos(\pi) - (-\cos(0)) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 - (-1) \right) = \frac{2}{\pi} \approx 0.637 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**