DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe EsVLiA

Für eine mobile Wasserfilterstation (Katastrophenschutz) wird die Förderleistung einer Pumpe während eines kurzen Testlaufs untersucht. Die Förderrate $q(t)$ (in L/s) hängt von der Zeit t (in s) ab: Zu Beginn muss das System ansaugen, dann steigt die Förderrate, erreicht kurz ein Maximum und fällt gegen Ende wieder ab, weil der Testlauf beendet und die Pumpe heruntergeregelt wird. Aus dem zugehörigen Graphen werden folgende Informationen abgelesen bzw. sind vorgegeben:

- Der Graph berührt die t-Achse bei $t = 0$ (Start: noch kein Durchfluss).
- Bei $t = 2$ liegt ein lokales Maximum.
- Zusätzlich gilt $q(1) = 2$ und $q(3) = 0$ (Test endet, Durchfluss fällt wieder auf 0).

a) Um die Förderleistung der Pumpe besser bewerten zu können, soll aus den stichpunktartig erfassten Kennwerten ein Modell erstellt werden: Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades $q(t)$ für die Förderrate (in L/s).

$$q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$q'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$\begin{aligned}
q(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \quad &= d \\
q(1) = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 0 \quad &= a + b + c \\
q(3) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + 0 \quad &= 27a + 9b + 3c \\
q'(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \quad &= 12a + 4b + c
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 27 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 12 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -18 & -24 & -54 \\ 0 & -8 & -11 & -24 \end{array}\right) \quad 9 \cdot \text{III} - 4 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -18 & -24 & -54 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{III} \quad & -3c = 0 && \mid :(-3) \\
& c = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & -18b - 24 \cdot 0 = -54 \\
& -18b = -54 && \mid :(-18) \\
& b = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & a + 3 + 0 = 2 && \mid -3 \\
& a = -1 \\
& \Rightarrow q(t) = -t^3 + 3t^2
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für den Filter gilt: Damit die Aktivkohle gleichmäßig arbeitet, soll die durchschnittliche Förderrate im Testlauf $[0;3]$ mindestens 1.2 L/s betragen. Prüfen Sie, ob diese Mindestanforderung erreicht wird.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(-t^3+3t^2\right)\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[-0.25t^4+t^3\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(-0.25\cdot 3^4+3^3-0\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-20.25+27\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 6.75 = 2.25 \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Förderrate beträgt 2.25 L/s. Da $2.25 \geq 1.2$ gilt, wird die Mindestanforderung erreicht.

c) Die Pumpe darf außerdem kurzfristig nicht überlastet werden: Die Förderrate soll im gesamten Intervall $[0;3]$ nicht über 2.8 L/s steigen. Prüfen Sie diese Bedingung am Modell.

$$\begin{aligned} q'(t) &= -3t^2+6t \\ q''(t) &= -6t+6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $q'(t)=0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3t^2+6t \\ &= t(-3t+6) \quad &| \; t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -3t+6 \quad &| \; +3t \\ 3t &= 6 \quad &| \; :3 \\ t_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $q'(t)=0 \quad \wedge \quad q''(t)\neq 0$

$$\begin{aligned} q''(0) &= 6>0 \quad &\Rightarrow \text{TP} \\ q''(2) &= -6<0 \quad &\Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $q(t)=y$

$$\begin{aligned} q(0) &= -0^3+3\cdot 0^2 = 0 \quad &\Rightarrow \text{TP}(0 \mid 0) \\ q(2) &= -2^3+3\cdot 2^2 = 4 \quad &\Rightarrow \text{HP}(2 \mid 4) \end{aligned}$$

Zusätzlich werden die Randwerte betrachtet:

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ q(3) &= -3^3+3\cdot 3^2 = 0 \end{aligned}$$

Der größte Wert im Intervall $[0;3]$ ist also $q(2)=4$. Da $4>2.8$ gilt, wird die maximal erlaubte Förderrate von 2.8 L/s deutlich überschritten. Die Bedingung ist nicht erfüllt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Abschließend soll die Gesamtmenge Wasser dokumentiert werden, die im Testlauf gefördert wurde. Bestimmen Sie diese Menge und geben Sie die Einheit korrekt an.

Die geförderte Gesamtmenge ergibt sich als Flächeninhalt unter dem Graphen im Intervall $[0;3]$:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \left(-t^3 + 3t^2\right)\, dt \\ &= \left[-0.25t^4 + t^3\right]_0^3 \\ &= -0.25 \cdot 3^4 + 3^3 - 0 \\ &= -20.25 + 27 \\ &= 6.75 \end{aligned}$$

Die Gesamtfördermenge beim Testlauf beträgt 6.75 L (Einheit: $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{L}$).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**