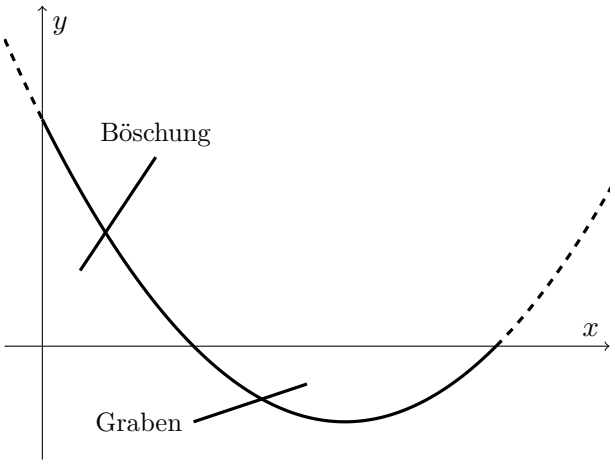
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe EA7kmn

Entlang der A1 rund um das Westhofener Kreuz soll ein neuer Lärmschutzwall errichtet werden, um die Anwohner wirksamer vor Verkehrslärm zu schützen. Direkt davor ist ein etwa 3 km langer Graben geplant, der später mit Wasser gefüllt wird und zusätzlich als gestalterisches Element dient. Zwischen Graben und Mauer wird eine Böschung aufgeschüttet, die anschließend begrünt werden soll. Damit möglichst wenig Material zu- oder abgefahren werden muss, soll der Aushub aus dem Graben vollständig für die Böschung verwendet werden.
Für die weiteren Berechnungen wird angenommen, dass der Querschnitt von Graben und Böschung durch eine Funktion beschrieben werden kann. Mutterboden hat dabei eine Dichte von $\rho = 1.3\,t/m^3$.
Der Graben beginnt 2 *m vor der Lärmschutzwand und besitzt eine Breite von* 4 *m. Der Verlauf wird modellhaft beschrieben durch* $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$. *Die Variable* x *beschreibt dabei die horizontale Entfernung in Metern,* $f(x)$ *die Höhe des Profils in Metern.*



Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zum Lärmschutzwall und bearbeiten Sie die folgenden Fragestellungen.

a) Wie groß ist die Querschnittsfläche des Grabens?

Zunächst werden die Nullstellen bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0 &= 0.25x^2 - 2x + 3 \quad | :0.25 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} \\ x_1 &= 6 \quad \vee \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Der Graben liegt also im Intervall $[2; 6]$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{aligned}
A_G &= \int_2^6 \left(0.25x^2 - 2x + 3\right)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right]_2^6 \\
&= \frac{1}{12}\cdot 6^3 - 6^2 + 3\cdot 6 - \left(\frac{1}{12}\cdot 2^3 - 2^2 + 3\cdot 2\right) \\
&= 18 - 36 + 18 - \left(\frac{2}{3} - 4 + 6\right) \\
&= 0 - \frac{8}{3} \\
&= -\frac{8}{3} \approx -2.667
\end{aligned}$$

Das Integral ist negativ, weil der Graben unterhalb der x-Achse liegt. Für die Querschnittsfläche gilt:

$$|A_G| = \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} \approx 2.667$$

Die Querschnittsfläche des Grabens beträgt also $\frac{8}{3}\,\mathrm{m}^2 \approx 2.67\,\mathrm{m}^2$.

b) Reicht das Aushubmaterial aus, um die geplante Böschung vollständig aufzuschütten – oder bleibt Material übrig bzw. fehlt etwas? Begründen Sie dies rechnerisch über einen Flächenvergleich.

Die Böschung liegt links vom Graben im Intervall $[0;2]$. Ihre Fläche beträgt:

$$\begin{aligned}
A_B &= \int_0^2 \left(0.25x^2 - 2x + 3\right)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{12}\cdot 2^3 - 2^2 + 3\cdot 2 - 0 \\
&= \frac{2}{3} - 4 + 6 \\
&= \frac{8}{3} \approx 2.667
\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$|A_G| = A_B = \frac{8}{3}$$

Der Querschnitt der Böschung ist genau so groß wie der Querschnitt des Grabens. Das ausgehobene Material reicht somit genau aus, um die Böschung vollständig aufzuschütten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Wie groß ist das insgesamt bewegte Volumen an Mutterboden (in m^3) bei einer Länge von 3 km? Bestimmen Sie anschließend die zugehörige Masse in Tonnen.

Die Länge beträgt 3 km = 3000 m.

$$\begin{aligned} V &= \frac{8}{3} \cdot 3000 \\ &= 8000 \end{aligned}$$

Also werden insgesamt $8000\,m^3$ Mutterboden bewegt.

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V \\ &= 1.3 \cdot 8000 \\ &= 10\,400 \end{aligned}$$

Die zugehörige Masse beträgt also 10 400 t.

d) Welche maximale Höhe erreicht die Böschung, und welche maximale Tiefe hat der Graben (jeweils im Querschnitt)?

Für die maximale Tiefe des Grabens wird der Tiefpunkt der Parabel mithilfe der Ableitung bestimmt (alternativ auch über die Scheitelpunktform möglich).

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.5x - 2 \\ f''(x) &= 0.5 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x - 2 && | +2 \\ 0.5x &= 2 && | \cdot 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(4) = 0.5 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(4) = 0.25 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = -1 \qquad \Rightarrow \text{TP}(4 \mid -1)$$

Die maximale Tiefe des Grabens beträgt 1 m.

Für die maximale Höhe der Böschung wird der Bereich $[0; 2]$ betrachtet. Dort fällt der Graph (links vom Tiefpunkt), der größte Funktionswert liegt also am Rand $x = 0$:

$$f(0) = 0.25 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Die maximale Höhe der Böschung beträgt also 3 m.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**