DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe DqNCuc

In einer Produktionslinie wird eine Kennzahl $N(x)$ verwendet, die den Nettoausstoß beschreibt: Positive Werte bedeuten verwertbare Produktion, negative Werte deuten auf mehr Ausschuss als Gutteile hin. x ist eine Stellgröße (z. B. Pressdruckstufe). Sofern der Nettoausstoß den Funktionswert null erreicht, ist die Produktion gerade „neutral“ – ab hier muss die Linie nachjustiert werden, damit kein Verlust entsteht.
Die Funktion ist gegeben mit:

$$N(x) = x^4 - 10x^2 + 9 \quad (\text{für } x > 0)$$

a) Bestimmen Sie, bei welchen Einstellungen der Nettoausstoß genau neutral ist.

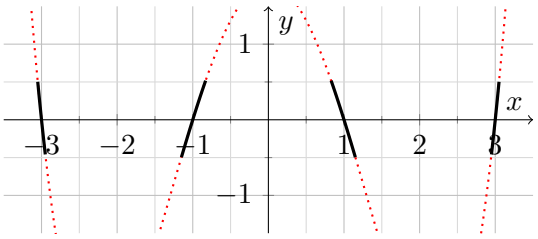
$$\begin{aligned}
N(x) &= 0 \\
0 &= x^4 - 10x^2 + 9 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 10z + 9 \\
z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} \\
z_1 = 9 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1
\end{aligned}$$

Wegen $x > 0$ ist der Nettoausstoß also bei $x = 1$ und $x = 3$ genau neutral.

b) Kennzeichnen Sie, in welchen Bereichen (zwischen den Null-Werten) die Produktion eher „lohnend“ wirkt ($N(x) > 0$) und in welchen eher „kritisch“ ($N(x) < 0$).

Verdeutlicht werden kann dies zunächst grafisch anhand eines Ausschnitts der x-Achse und mit dem zusätzlichen Wissen, dass die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist und wegen ihres positiven Leitkoeffizienten insgesamt „von oben nach oben“ verläuft.

Da die Pressdruckstufe im Sachzusammenhang nur positive Werte annehmen kann, ist hier nur der Bereich $x > 0$ relevant.



Kontrolle mit je einem Testwert zwischen den Nullstellen:

$$\begin{aligned}
N(0.5) &= 0.5^4 - 10 \cdot 0.5^2 + 9 = 6.5625 > 0 \\
N(2) &= 2^4 - 10 \cdot 2^2 + 9 = -15 < 0 \\
N(4) &= 4^4 - 10 \cdot 4^2 + 9 = 105 > 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

- Von 0 bis 1 ist der Nettoausstoß positiv, die Produktion also lohnend.
- Von 1 bis 3 ist der Nettoausstoß negativ, die Produktion also kritisch.
- Ab $x = 3$ ist der Nettoausstoß wieder positiv, die Produktion also erneut lohnend.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**