DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe DRKbVk

Eine wiederverwendbare Getränkeflasche soll innen ein möglichst großes Fassungsvermögen haben, gleichzeitig aber nicht zu breit werden. Die Flasche wird als Rotationskörper modelliert: Der Innenraum entsteht durch Rotation des Innenradius, die Außenkontur durch Rotation des Außenradius. Aus der Differenz ergibt sich die Wandstärke bzw. das Materialvolumen (x ist die Höhe in cm).

- Innenradius (in cm): $r(x) = 0.022x + 2.9$ für $0 \leq x \leq 18$
- Außenradius (in cm): $R(x) = -0.002x^2 + 0.06x + 3$ für $0 \leq x \leq 18$

a) Stellen Sie sicher, dass das Modell überhaupt eine Flasche beschreibt: Begründen Sie rechnerisch, dass im gesamten Intervall $R(x) > r(x)$ gilt.

$$\begin{aligned} d(x) &= R(x) - r(x) \\ &= -0.002x^2 + 0.06x + 3 - (0.022x + 2.9) \\ &= -0.002x^2 + 0.038x + 0.1 \end{aligned}$$

Nullstellen von d:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.002x^2 + 0.038x + 0.1 \qquad | :(-0.002) \\ 0 &= x^2 - 19x - 50 \\ x_{1/2} &= 9.5 \pm \sqrt{9.5^2 + 50} \\ x_1 &\approx 21.342 \quad \vee \quad x_2 \approx -2.342 \end{aligned}$$

Beide Nullstellen liegen außerhalb des Intervalls $[0; 18]$, d. h. $d(x)$ wechselt im Intervall nicht das Vorzeichen. Wegen $d(0) = 0.1 > 0$ ist $d(x) > 0$ im gesamten Intervall. Es gilt also durchgehend $R(x) > r(x)$, die Wandstärke ist überall positiv.

b) Für das Design sind Durchmesser unten ($x = 0$) und oben ($x = 18$) wichtig. Ermitteln Sie jeweils den Außendurchmesser und geben Sie die Standfläche in cm^2 an.

$$\begin{aligned} R(0) &= -0.002 \cdot 0^2 + 0.06 \cdot 0 + 3 = 3 \\ R(18) &= -0.002 \cdot 18^2 + 0.06 \cdot 18 + 3 = 3.432 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{unten}} &= 2 \cdot 3 = 6 \\ D_{\text{oben}} &= 2 \cdot 3.432 = 6.864 \end{aligned}$$

$$A_B = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28.274$$

Der Außendurchmesser beträgt unten 6 cm und oben ungefähr 6.86 cm. Die Standfläche beträgt ungefähr $28.27\,\text{cm}^2$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Die Produktbeschreibung soll das Fassungsvermögen enthalten. Ermitteln Sie das Innenvolumen der Flasche in Milliliter.

Das Innenvolumen ergibt sich als Rotationsvolumen von $r(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.022x+2.9)^2 &= (0.022x)^2 + 2\cdot 0.022x\cdot 2.9 + 2.9^2\\ &= 0.000484x^2 + 0.1276x + 8.41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_i &= \pi\int_0^{18}(0.022x+2.9)^2\,dx\\ &= \pi\int_0^{18}(0.000484x^2+0.1276x+8.41)\,dx\\ &= \pi\left[\frac{121}{750000}x^3 + 0.0638x^2 + 8.41x\right]_0^{18}\\ &= \pi\left(\frac{121}{750000}\cdot 18^3 + 0.0638\cdot 18^2 + 8.41\cdot 18 - 0\right)\\ &= \pi\,(0.940896 + 20.6712 + 151.38)\\ &= 172.992096\pi \approx 543.471\end{aligned}$$

Da $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{ml}$ gilt, beträgt das Fassungsvermögen der Flasche ungefähr $543.5\,\text{ml}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Für die Materialplanung wird das Kunststoffvolumen benötigt. Stellen Sie ein Integral für das Materialvolumen auf und berechnen Sie es.

Das Materialvolumen ergibt sich als Volumen des Hohlkörpers zwischen $R(x)$ und $r(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= (-0.002x^2 + 0.06x + 3)^2 - (0.022x + 2.9)^2 \\
&= (-0.002x^2 + 0.06x + 3)(-0.002x^2 + 0.06x + 3) \\
&\quad - (0.000484x^2 + 0.1276x + 8.41) \\
&= 0.000004x^4 - 0.00012x^3 - 0.006x^2 \\
&\quad - 0.00012x^3 + 0.0036x^2 + 0.18x \\
&\quad - 0.006x^2 + 0.18x + 9 - (0.000484x^2 + 0.1276x + 8.41) \\
&= 0.000004x^4 - 0.00024x^3 - 0.0084x^2 + 0.36x + 9 \\
&\quad - (0.000484x^2 + 0.1276x + 8.41) \\
&= 0.000004x^4 - 0.00024x^3 - 0.008884x^2 + 0.2324x + 0.59
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_m &= \pi \int_0^{18} \left(R(x)^2 - r(x)^2 \right) dx \\
&= \pi \int_0^{18} (0.000004x^4 - 0.00024x^3 - 0.008884x^2 + 0.2324x + 0.59)\, dx \\
&= \pi \left[0.0000008x^5 - 0.00006x^4 - \frac{2221}{750000}x^3 + 0.1162x^2 + 0.59x \right]_0^{18} \\
&= \pi \left(0.0000008 \cdot 18^5 - 0.00006 \cdot 18^4 - \frac{2221}{750000} \cdot 18^3 + 0.1162 \cdot 18^2 + 0.59 \cdot 18 - 0 \right) \\
&= \pi \,(1.5116544 - 6.29856 - 17.270496 + 37.6488 + 10.62) \\
&= 26.2113984\pi \approx 82.346
\end{aligned}$$

Das Materialvolumen beträgt ungefähr $82.346\,\text{cm}^3$.

e) Ein Granulatdatenblatt gibt an: $1\,\text{cm}^3$ Kunststoff entspricht $1.05\,\text{g}$. Berechnen Sie daraus die Masse der Flasche und erläutern Sie kurz, ob die Größenordnung plausibel wirkt.

$$\begin{aligned}
m &= V_m \cdot \rho \\
&= 82.346\,\text{cm}^3 \cdot 1.05\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\
&\approx 86.46\,\text{g}
\end{aligned}$$

Die Flasche hat damit eine Masse von ungefähr $86.5\,\text{g}$. Das erscheint für eine $500\,\text{ml}$-Kunststoffflasche plausibel: Handelsübliche Trinkflaschen aus Kunststoff liegen je nach Wandstärke und Material typischerweise im Bereich von 50 bis $150\,\text{g}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**