DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe Cxg6Xq

Bestimmen Sie die geometrische Fläche, die zwischen den beiden Funktionsgraphen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \qquad g(x) = x^3 + 2x^2 - 8x - 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 + x^2 - 4x - 4 - (x^3 + 2x^2 - 8x - 1) \\ &= x^3 + x^2 - 4x - 4 - x^3 - 2x^2 + 8x + 1 \\ &= -x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4x - 3 && \mid :(-1) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach 1 und 3.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^3 - 7x - 6 \qquad g(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 7x - 6 - (2x^3 - 6x^2 + x - 6) \\ &= x^3 - 7x - 6 - 2x^3 + 6x^2 - x + 6 \\ &= -x^3 + 6x^2 - 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 6x^2 - 8x \\ &= x(-x^2 + 6x - 8) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 6x - 8 && \mid :(-1) \\ &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{2/3} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = 2 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach 0, 2 und 4.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 8x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 0 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2\right) \\ &= 0 - (-4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= |-4| + |4| \\ &= 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 4x + 2 \qquad g(x) = x^4 - 6.5x^2 - 4x + 2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 0.5x^2 - 4x + 2 - (x^4 - 6.5x^2 - 4x + 2) \\ &= x^3 - 0.5x^2 - 4x + 2 - x^4 + 6.5x^2 + 4x - 2 \\ &= -x^4 + x^3 + 6x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^4 + x^3 + 6x^2 \\ &= x^2(-x^2 + x + 6) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + x + 6 && \mid :(-1) \\ &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Schnittstellen sind der Größe nach -2, 0 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (-x^4 + x^3 + 6x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 \right]_{-2}^{0} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 + \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{28}{5} \right) \\ &= \frac{28}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{3} (-x^4 + x^3 + 6x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 \right]_{0}^{3} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 3^5 + \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 - 0 \\ &= \frac{513}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left| \frac{28}{5} \right| + \left| \frac{513}{20} \right| \\ &= \frac{28}{5} + \frac{513}{20} \\ &= \frac{125}{4} = 31.25 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**