DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe CX9f1Y

Bei einer Fachmesse wird am Eingang nicht nur gezählt, wie viele Personen ankommen, sondern auch, wie viele Personen pro Stunde zusätzlich abgefertigt werden müssten, damit keine Schlange entsteht. Dazu wird eine Bilanzfunktion $B(t)$ genutzt, die für jeden Zeitpunkt t beschreibt, um wie viele Personen ($B(t) = 1$ sind 100) pro Stunde die Abfertigungskapazität erhöht werden müsste, damit die Schlange konstant bleibt oder wieder abgebaut wird.

- $B(t) > 0$: Es kommen mehr Menschen an, als im gleichen Zeitraum abgefertigt werden.
- $B(t) < 0$: Es werden mehr Menschen abgefertigt, als neu ankommen.
- $B(t) = 0$: Ankunft und Abfertigung sind im Gleichgewicht.

Die Zeit t wird in Stunden seit Öffnung gemessen (mit $0 \leq t \leq 9$, wobei $t = 0$ Öffnung der Messe ist). Das Modell lautet:

$$B(t) = \frac{1}{10}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{1619}{160}t^2 - \frac{2907}{160}t + \frac{63}{16}$$

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, an denen Gleichgewicht herrscht. Deuten Sie, was an diesen Zeiten am Eingang passiert.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{10}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{1619}{160}t^2 - \frac{2907}{160}t + \frac{63}{16} \quad | :\frac{1}{10} \\ &= t^4 - 18t^3 + \frac{1619}{16}t^2 - \frac{2907}{16}t + \frac{315}{8} \quad | \, t_1 = 3 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen und der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten und t rechnen.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -18 & \frac{1619}{16} & -\frac{2907}{16} & \frac{315}{8} \\ 3 & & 3 & -45 & \frac{2697}{16} & -\frac{315}{8} \\ \hline & 1 & -15 & \frac{899}{16} & -\frac{105}{8} & 0 \end{array}$$

$$0 = t^3 - 15t^2 + \frac{899}{16}t - \frac{105}{8} \quad | \, t_2 = 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -15 & \frac{899}{16} & -\frac{105}{8} \\ 6 & & 6 & -54 & \frac{105}{8} \\ \hline & 1 & -9 & \frac{35}{16} & 0 \end{array}$$

$$0 = t^2 - 9t + \frac{35}{16}$$

$$t_{3/4} = 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - \frac{35}{16}}$$

$$t_3 = 8.75 \quad \vee \quad t_4 = 0.25$$

Zu den Zeitpunkten $t = 0.25$, $t = 3$, $t = 6$ und $t = 8.75$ kommen genau so viele Messebesucher an, wie vom Personal abgefertigt werden. In diesen Momenten herrscht also Gleichgewicht am Eingang, die Schlange wird weder länger noch kürzer.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Finden Sie heraus, wann der Andrang am stärksten „drückt“ (größter positiver Wert) und wann der Abbau am stärksten ist (kleinster Wert). Beschreiben Sie beide Situationen in eigenen Worten.

$$B'(t) = \frac{2}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 + \frac{1619}{80}t - \frac{2907}{160}$$
$$B''(t) = \frac{6}{5}t^2 - \frac{54}{5}t + \frac{1619}{80}$$

notw. Bed.: $B'(t) = 0$

$$0 = \frac{2}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 + \frac{1619}{80}t - \frac{2907}{160} \quad | :\frac{2}{5}$$
$$= t^3 - \frac{27}{2}t^2 + \frac{1619}{32}t - \frac{2907}{64} \quad | \, t_1 = 4.5$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen und der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten und t rechnen.

	1	$-\frac{27}{2}$	$\frac{1619}{32}$	$-\frac{2907}{64}$
$\frac{9}{2}$		$\frac{9}{2}$	$-\frac{81}{2}$	$\frac{2907}{64}$
	1	-9	$\frac{323}{32}$	0

$$0 = t^2 - 9t + \frac{323}{32}$$
$$t_{2/3} = 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - \frac{323}{32}}$$
$$t_2 \approx 7.687 \quad \vee \quad t_3 \approx 1.313$$

hinr. Bed.: $B'(t) = 0 \quad \wedge \quad B''(t) \neq 0$

$$B''(4.5) = -4.0625 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$B''(7.687) \approx 8.126 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$B''(1.313) \approx 8.126 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $B(t) = y$

$$B(4.5) \approx 4.064 \qquad \Rightarrow \text{HP}(4.5 \mid 4.06)$$
$$B(7.687) \approx -6.251 \qquad \Rightarrow \text{TP}(7.69 \mid -6.25)$$
$$B(1.313) \approx -6.251 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1.31 \mid -6.25)$$

Randwerte des Intervalls:

$$B(0) = 3.9375$$
$$B(9) = 3.9375$$

Die Randwerte sind kleiner als der Wert im Hochpunkt und größer als die Werte in den Tiefpunkten.

Nach etwa 4.5 Stunden drückt der Andrang am stärksten. Dann kommen deutlich mehr Menschen an, als abgefertigt werden, und die Schlange wächst besonders stark. Nach etwa 1.31 Stunden und nochmals nach etwa 7.69 Stunden ist der Abbau am stärksten. Dann wird deutlich mehr abgefertigt, als neu ankommt, und die Schlange kann besonders schnell kleiner werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Entscheiden Sie: In welchen Zeitabschnitten ist es sinnvoller, Personal hinzuzuziehen, und in welchen Abschnitten könnte man Personal abziehen, ohne dass sich die Lage verschlechtert? Begründen Sie mit den Eigenschaften des Graphen.

Aus a) folgen die Nullstellen $t = 0.25$, $t = 3$, $t = 6$ und $t = 8.75$.

Da $B(t) > 0$ bedeutet, dass mehr Menschen ankommen als abgefertigt werden, ist zusätzliches Personal dort besonders sinnvoll, wo der Graph oberhalb der t-Achse liegt. Das ist in den Intervallen

$$[0\ ;\ 0.25), \quad (3\ ;\ 6), \quad (8.75\ ;\ 9]$$

der Fall.

Da $B(t) < 0$ bedeutet, dass mehr Menschen abgefertigt werden als neu ankommen, könnte in den Intervallen

$$(0.25\ ;\ 3), \quad (6\ ;\ 8.75)$$

eher Personal abgezogen werden, ohne dass sich die Lage verschlechtert.

Besonders kritisch ist dabei der Bereich um den Hochpunkt bei $t = 4.5$, weil dort der zusätzliche Bedarf am größten ist. Besonders unkritisch sind die Bereiche um die Tiefpunkte bei $t \approx 1.31$ und $t \approx 7.69$, weil dort der Abbau der Schlange am stärksten ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**