DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe CQNr71

In einem Auto wird beim Bremsen deutlich, dass sich die Geschwindigkeit nicht gleichmäßig verändert. Je nach Untergrund, Bremsdruck und Assistenzsystemen (z. B. ABS) kann die Verzögerung zu Beginn stärker sein und später etwas nachlassen – oder umgekehrt. Für viele Fragestellungen reicht es deshalb nicht aus zu wissen, wie stark die Geschwindigkeit im Durchschnitt innerhalb eines Zeitintervalls sinkt. Entscheidend ist häufig, wie stark sie in genau diesem Moment abnimmt.
Als Modell für eine Bremsung aus etwa 50 km/h (≈ 13.9 m/s) kann die Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) zum Beispiel durch folgende Funktion beschrieben werden: $v(t) = 13.9 - 5t - 0.5t^2 \quad (0 \le t \le 2.27)$
Dabei ist $v(t)$ in m/s angegeben. Das Modell beschreibt eine Bremsung, bei der die Geschwindigkeit kontinuierlich abnimmt und das Fahrzeug nach rund 2.27 s zum Stillstand kommt. Für die Beurteilung der Bremswirkung ist nun besonders interessant, wie groß die Geschwindigkeitsänderung zu einem bestimmten Zeitpunkt ist (z. B. bei $t = 1$ oder $t = 2$). Genau diese Momentbetrachtung führt zur lokalen Änderungsrate.

Beziehen Sie sich auf den Bremsvorgang in der Situationsbeschreibung.

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode die lokale Änderungsrate von $v(t)$ an der Stelle $t = 1$.

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \\
&= \frac{13.9 - 5(t+h) - 0.5(t+h)^2 - \left(13.9 - 5t - 0.5t^2\right)}{h} \\
&= \frac{13.9 - 5t - 5h - 0.5(t^2 + 2th + h^2) - 13.9 + 5t + 0.5t^2}{h} \\
&= \frac{13.9 - 5t - 5h - 0.5t^2 - th - 0.5h^2 - 13.9 + 5t + 0.5t^2}{h} \\
&= \frac{-5h - th - 0.5h^2}{h} \\
&= \frac{h(-5 - t - 0.5h)}{h} \\
&= -5 - t - 0.5h \\
v'(t) &= \lim_{h \to 0}(-5 - t - 0.5h) \\
&= -5 - t \\
v'(1) &= -5 - 1 = -6
\end{aligned}
$$

b) Deuten Sie das Ergebnis im Kontext.

Die lokale Änderungsrate an der Stelle $t = 1$ beträgt $-6 \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$. Das bedeutet: Eine Sekunde nach Beginn des Bremsvorgangs nimmt die Geschwindigkeit des Autos in diesem Moment um $6 \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$ ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**