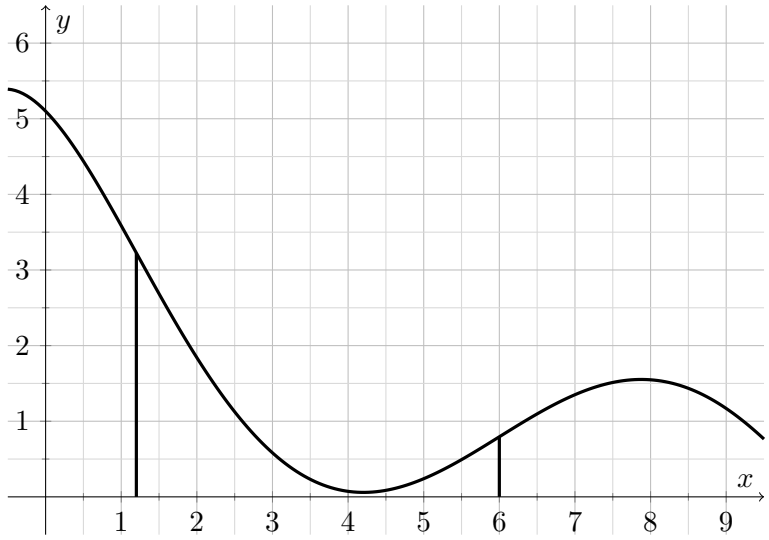
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe BpFpqc

In einem großen Freizeitbad sorgt die Wasserrutsche Blue Vortex für besonderen Nervenkitzel. Direkt nach dem Start geht es zunächst sehr steil bergab, bevor sie den tiefsten Punkt erreicht, um danach noch einmal leicht anzusteigen und kurz darauf wieder in ein Gefälle überzugehen. Für die Konstruktion sind dabei nicht nur die tiefsten und höchsten Stellen wichtig, sondern vor allem die Übergänge im Verlauf, an denen sich das Fahrgefühl deutlich verändert: Nach dem Tiefpunkt nimmt die Steigung zunächst zu, um dann wieder abzuflachen. Genau dort ändert sich die Krümmung der Bahn. Diese Krümmungswechsel sind für die Planung entscheidend, weil sie beeinflussen, wie plötzlich Belastungen entstehen oder abklingen. Damit die Rutsche sicher und angenehm befahrbar bleibt, müssen diese Übergangsbereiche möglichst gleichmäßig gestaltet werden.
Der Verlauf der Rutschbahn wird näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben:

$$r(x) = 0.001x^5 - 0.029x^4 + 0.2688x^3 - 0.7344x^2 - 1.02x + 5.1$$

Dabei geben x und $r(x)$ die Werte jeweils in 10 m an (d. h. eine Einheit entspricht 10 Metern).



Schauen Sie sich noch mal die Situationsbeschreibung mit der Wasserrutsche an.

a) Bestimmen Sie die beiden relevanten Wendepunkte dieser Funktion.

$$\begin{aligned} r'(x) &= 0.005x^4 - 0.116x^3 + 0.8064x^2 - 1.4688x - 1.02 \\ r''(x) &= 0.02x^3 - 0.348x^2 + 1.6128x - 1.4688 \\ r'''(x) &= 0.06x^2 - 0.696x + 1.6128 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $r''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.02x^3 - 0.348x^2 + 1.6128x - 1.4688 && | :0.02 \\ &= x^3 - 17.4x^2 + 80.64x - 73.44 && | \, x_1 = 6 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -\frac{87}{5} & \frac{2016}{25} & -\frac{1836}{25} \\ 6 & & 6 & -\frac{342}{5} & \frac{1836}{25} \\ \hline & 1 & -\frac{57}{5} & \frac{306}{25} & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 11.4x + 12.24$$
$$x_{2/3} = 5.7 \pm \sqrt{5.7^2 - 12.24}$$
$$x_2 = 10.2 \quad \vee \quad x_3 = 1.2$$

Mathematisch besitzt die Funktion also drei Wendestellen. Im Sachzusammenhang sind jedoch nur die Stellen $x = 1.2$ und $x = 6$ relevant, da die Rutsche nur bis etwa $x = 9$ verläuft.

hinr. Bed.: $r''(x) = 0 \quad \wedge \quad r'''(x) \neq 0$

$$r'''(1.2) = 0.06 \cdot 1.2^2 - 0.696 \cdot 1.2 + 1.6128 = 0.864 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$r'''(6) = 0.06 \cdot 6^2 - 0.696 \cdot 6 + 1.6128 = -0.4032 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $r(x) = y$

$$\begin{aligned} r(1.2) &= 0.001 \cdot 1.2^5 - 0.029 \cdot 1.2^4 + 0.2688 \cdot 1.2^3 \\ &\quad - 0.7344 \cdot 1.2^2 - 1.02 \cdot 1.2 + 5.1 \\ &\approx 3.225 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.2 \mid 3.23) \\ r(6) &= 0.001 \cdot 6^5 - 0.029 \cdot 6^4 + 0.2688 \cdot 6^3 \\ &\quad - 0.7344 \cdot 6^2 - 1.02 \cdot 6 + 5.1 \\ &\approx 0.794 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(6 \mid 0.79) \end{aligned}$$

b) Unter anderem befinden sich an den Wendepunkten Stützpfeiler (siehe Zeichnung). Welche Länge haben diese jeweils?

Da eine Einheit auf beiden Achsen 10 m entspricht, ergeben sich die Längen der Stützpfeiler aus den y-Werten der relevanten Wendepunkte.

$$\begin{aligned} \mathrm{WP}_1: &\quad 3.225 \cdot 10\,\mathrm{m} \approx 32.25\,\mathrm{m} \\ \mathrm{WP}_2: &\quad 0.794 \cdot 10\,\mathrm{m} = 7.94\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Stützpfeiler sind also etwa 32.25 m bzw. 7.94 m lang.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**