DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe Bf74fP

Die Begrenzungen der Parkanlage werden durch zwei Straßen modelliert. Im Koordinatensystem gilt:

- x und y sind in 10 m-Schritten angegeben ($x = 1$ entspricht 10 m)
- innerer Straßenverlauf: $f(x) = 0.25x^2 + 2$
- äußerer Straßenverlauf: $g(x) = -0.25x^2 + 4x + 2$

Der betrachtete Parkbereich liegt zwischen den Schnittpunkten der beiden Kurven.

a) Die Parkzugänge sollen genau dort liegen, wo sich die beiden Straßen schneiden. Ermitteln Sie die Koordinaten beider Zugänge (Schnittpunkte).

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0.25x^2 + 2 - (-0.25x^2 + 4x + 2) \\ &= 0.25x^2 + 2 + 0.25x^2 - 4x - 2 \\ &= 0.5x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - 4x \\ &= x(0.5x - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x - 4 && \mid +4 \\ 0.5x &= 4 && \mid :0.5 \\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$

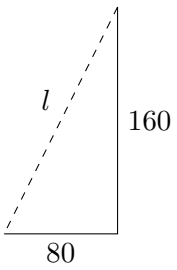
$$\begin{aligned} f(0) &= 0.25 \cdot 0^2 + 2 = 2 && \Rightarrow A(0 \mid 2) \\ f(8) &= 0.25 \cdot 8^2 + 2 = 18 && \Rightarrow B(8 \mid 18) \end{aligned}$$

Die Zugänge liegen in den Punkten $A(0 \mid 2)$ und $B(8 \mid 18)$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Zwischen diesen beiden Zugängen soll ein gerader, betonierter Weg durch den Park verlaufen. Bestimmen Sie dazu zunächst die tatsächliche Weglänge in Metern, indem Sie die Entfernung der beiden Zugangspunkte mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Anschließend soll die benötigte Betonmenge für den Weg ermittelt werden. Der Weg ist 3 m breit und hat eine Dicke von 20 cm. Berechnen Sie das Betonvolumen in m^3, das dafür benötigt wird.

Da eine Längeneinheit im Koordinatensystem 10 m entspricht, liegen die Zugänge in Metern bei $A(0 \mid 20)$ und $B(80 \mid 180)$.



$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(80-0)^2 + (180-20)^2} \\ &= \sqrt{80^2 + 160^2} \\ &\approx 178.885 \end{aligned}$$

Die Weglänge beträgt ungefähr 178.89 m. Die Dicke von 20 cm entspricht 0.2 m.

$$V = 178.885 \cdot 3 \cdot 0.2 \approx 107.331$$

Es werden ungefähr 107.33 m^3 Beton benötigt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Für die Kostenkalkulation wird für Rollrasen ein Preis von 7.99 Euro/m^2 angesetzt. Bestimmen Sie die Rasenfläche der Parkanlage in m^2 und berechnen Sie daraus die Materialkosten. Die Fläche des betonierten Weges wird dabei nicht abgezogen (der Weg liegt im Modell also „über“ dem Rasen). Berücksichtigen Sie zusätzlich 10 % Verschnitt.

$$\begin{aligned}\int_0^8 (0.5x^2 - 4x)\,dx &= \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right]_0^8 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 8^3 - 2\cdot 8^2 - 0 \\ &= \frac{256}{3} - 128 \\ &= -\frac{128}{3}\end{aligned}$$

$$A = \left|-\frac{128}{3}\right| = \frac{128}{3} \approx 42.667$$

Eine Flächeneinheit entspricht $10\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{m}^2$:

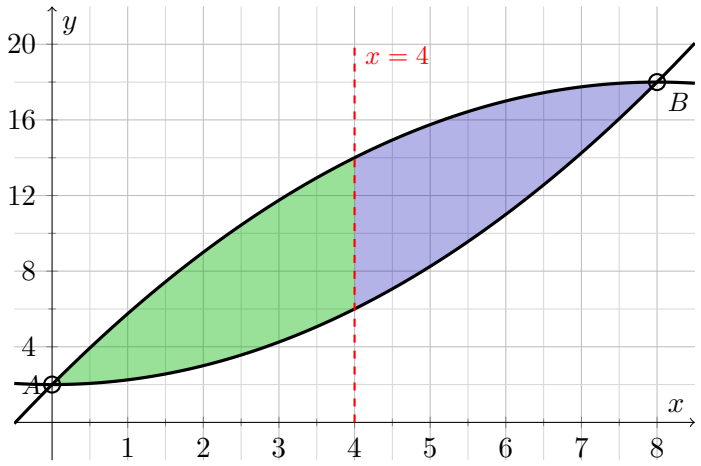
$$A = \frac{128}{3}\cdot 100 = \frac{12800}{3} \approx 4266.667$$

$$K = \frac{12800}{3}\cdot 1.1 \cdot 7.99 \approx 37499.73$$

Die Rasenfläche beträgt ungefähr $4\,266.67\ \mathrm{m}^2$. Die Materialkosten betragen ungefähr 37 499.73 Euro.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Lassen Sie sich die Funktionen mit einem geeigneten Programm (z. B. GeoGebra) zeichnen und überlegen Sie zunächst ohne Rechnung, wie die Parkfläche durch eine senkrechte Trennlinie (also eine Gerade $x = k$, parallel zur y-Achse) in zwei gleich große Teilflächen geteilt werden kann. Geben Sie den Wert k an, sodass die von den beiden Begrenzungsfunktionen eingeschlossene Fläche im Intervall zwischen den Schnittpunkten links von $x = k$ genauso groß ist wie rechts von $x = k$. Prüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.



Aus der Zeichnung erkennt man eine Symmetrie zur Geraden $x = 4$. Daher ist zu vermuten: $k = 4$.

Rechnerische Prüfung mit $g(x) - f(x) = -0.5x^2 + 4x$ (der Graph von g liegt im Intervall oberhalb von f):

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^4 (-0.5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right]_0^4 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 - 0 \\ &= -\frac{32}{3} + 32 = \frac{64}{3} \approx 21.333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_4^8 (-0.5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right]_4^8 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 - \left(-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2\right) \\ &= \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3} \approx 21.333 \end{aligned}$$

Da $A_1 = A_2$ gilt, teilt die Gerade $x = 4$ die Parkfläche tatsächlich in zwei gleich große Teilflächen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**