DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 9ugQqu

Um den Ertrag einer angebauten Weizensorte zu steigern, wird Dünger eingesetzt. Eine zu hohe Düngermenge kann jedoch dazu führen, dass der Ertrag wieder sinkt. Der Zusammenhang wird modellhaft beschrieben durch

$$f(x) = -90x^3 + 12x^2 + 12x + 6,$$

wobei x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und $f(x)$ den Ertrag in Tonnen pro Hektar angibt.

a) Bestimmen Sie den Ertrag bei einer Düngermenge von $x = 0.2\,\text{t/ha}$.

$$f(0.2) = -90 \cdot 0.2^3 + 12 \cdot 0.2^2 + 12 \cdot 0.2 + 6 = 8.16$$

Der Ertrag beträgt bei einer Düngermenge von $0.2\,\text{t/ha}$ also $8.16\,\text{t}$ Weizen pro ha.

b) Welche Düngermenge würden Sie dem Landwirt empfehlen?

$$f'(x) = -270x^2 + 24x + 12$$
$$f''(x) = -540x + 24$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -270x^2 + 24x + 12 && \mid :(-270) \\ &= x^2 - \frac{4}{45}x - \frac{2}{45} \\ x_{1/2} &= \frac{2}{45} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{45}\right)^2 + \frac{2}{45}} \\ x_1 &\approx 0.260 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.171 \end{aligned}$$

Eine negative Düngermenge ist nicht möglich, x_2 entfällt also im Sachzusammenhang.

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(0.260) = -540 \cdot 0.260 + 24 = -116.4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(0.260) = -90 \cdot 0.260^3 + 12 \cdot 0.260^2 + 12 \cdot 0.260 + 6 \approx 8.349 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0.26 \mid 8.35)$$

Dem Landwirt würde man also eine Düngermenge von etwa $0.26\,\text{t/ha}$ empfehlen, da dort mit etwa $8.35\,\text{t/ha}$ der größte Ertrag erzielt wird.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Bestimmen Sie die Wendestelle und berechnen Sie die dortige Steigung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -270x^2 + 24x + 12 \\ f''(x) &= -540x + 24 \\ f'''(x) &= -540 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -540x + 24 && | +540x \\ 540x &= 24 && | :540 \\ x &= \frac{2}{45} \approx 0.044 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{2}{45}\right) = -540 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Steigung an der Wendestelle:

$$f'\left(\frac{2}{45}\right) = -270 \cdot \left(\frac{2}{45}\right)^2 + 24 \cdot \frac{2}{45} + 12 = \frac{188}{15} \approx 12.53$$

d) Deuten Sie das Ergebnis aus c) im Sachzusammenhang: Was sagt die Wendestelle über die Veränderung des Ertrags bei weiter steigender Düngermenge aus?

Die Wendestelle zeigt den Übergang, an dem sich die Art des Ertragsanstiegs verändert.

An der Wendestelle ist der Ertragszuwachs am größten. Das bedeutet: Mit nur wenig mehr Dünger kann dort noch deutlich mehr Weizen erzeugt werden.

Bis zu dieser Stelle steigt der Ertrag also nicht nur, sondern der Zuwachs wird zunächst immer größer. Nach der Wendestelle steigt der Ertrag zwar weiterhin, aber der zusätzliche Nutzen durch mehr Dünger wird immer kleiner.

Im Vergleich dazu ist der Ertragszuwachs kurz vor dem Hochpunkt nur noch sehr gering: Eine weitere Erhöhung der Düngermenge bringt dann kaum noch zusätzlichen Ertrag in der Getreidemenge.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**