DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 9tRBiT

In einer kleinen Wasseraufbereitungsanlage wird eine zylindrische Pumpenkammer mit einem speziell geformten Einsatz abgedichtet. Der Einsatz wird gedreht hergestellt; sein Profil wird in einem Koordinatensystem beschrieben. x ist die Länge in cm entlang der Kammerachse. Durch Rotation um die x-Achse entsteht der dreidimensionale Einsatzkörper.
Der Radius wird für $0 \leq x \leq 20$ modelliert durch:

$$f(x) = 2.6 + 0.12x - 0.006x^2$$

a) Für die Montage darf der Einsatz nirgends einen Durchmesser von mehr als 6 cm haben. Prüfen Sie diese Vorgabe im Modell und nennen Sie die Stelle, an der der Einsatz am breitesten ist.

Da $f(x)$ den Radius beschreibt, ist der Einsatz dort am breitesten, wo $f(x)$ maximal ist.

$$f'(x) = -0.012x + 0.12$$
$$f''(x) = -0.012$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.012x + 0.12 && \mid +0.012x \\ 0.012x &= 0.12 && \mid :0.012 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(10) = -0.012 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(10) = 2.6 + 0.12 \cdot 10 - 0.006 \cdot 10^2 = 3.2 \qquad \Rightarrow \text{HP}(10 \mid 3.2)$$

$$d = 2 \cdot 3.2 = 6.4$$

Der Einsatz ist bei $x = 10$ cm am breitesten. Dort beträgt der Durchmesser 6.4 cm. Da $6.4 > 6$ gilt, wird die Vorgabe nicht erfüllt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Materialplanung soll bestimmt werden, wie viel Dichtmaterial pro Einsatz benötigt wird. Ermitteln Sie das Volumen des Einsatzes in cm^3 und geben Sie das Gewicht bei einer Dichte von $\rho = 2.7\ \text{g/cm}^3$ an.

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 &= (2.6 + 0.12x - 0.006x^2)(2.6 + 0.12x - 0.006x^2)\\ &= 6.76 + 0.312x - 0.0156x^2 + 0.312x + 0.0144x^2\\ &\quad - 0.00072x^3 - 0.0156x^2 - 0.00072x^3 + 0.000036x^4\\ &= 0.000036x^4 - 0.00144x^3 - 0.0168x^2 + 0.624x + 6.76\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{20} \left(0.000036x^4 - 0.00144x^3 - 0.0168x^2 + 0.624x + 6.76\right)\, dx\\ &= \pi \left[0.0000072x^5 - 0.00036x^4 - 0.0056x^3 + 0.312x^2 + 6.76x\right]_0^{20}\\ &= \pi \left(0.0000072 \cdot 20^5 - 0.00036 \cdot 20^4 - 0.0056 \cdot 20^3 + 0.312 \cdot 20^2 + 6.76 \cdot 20 - 0\right)\\ &= \pi \left(23.04 - 57.6 - 44.8 + 124.8 + 135.2\right)\\ &= 180.64\pi \approx 567.497\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m &= \rho \cdot V\\ &= 2.7 \cdot 567.497\\ &\approx 1532.242\end{aligned}$$

Der Einsatz hat ein Volumen von rund $567.5\ \text{cm}^3$ und ein Gewicht von rund $1\,532.24$ g, also etwa 1.53 kg.

c) Der Hersteller kalkuliert mit 0.018 Euro pro cm^3 Material (inkl. Verschnitt). Bestimmen Sie die Materialkosten für einen Einsatz.

$$K = 0.018 \cdot 567.497 \approx 10.2149$$

Die Materialkosten für einen Einsatz betragen rund 10.21 Euro.

d) Für eine Serie werden 250 Einsätze benötigt. Die Anlage kann nur freigegeben werden, wenn die Materialkosten unter 2 700 Euro bleiben. Bewerten Sie, ob die Vorgabe erfüllt ist.

$$K_{\text{ges}} = 250 \cdot 10.2149 \approx 2553.73$$

Da $2553.73 < 2700$ gilt, wird die Vorgabe erfüllt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Bei der Fertigung gilt: Damit der Einsatz sauber abdichtet, darf die Steigung des Radius höchstens 0.05 cm/cm betragen, also $|f'(x)| \leq 0.05$. Bestimmen Sie alle x-Werte im Intervall $[0; 20]$, für die diese Vorgabe erfüllt ist, und interpretieren Sie den Bereich.

$$f'(x) = -0.012x + 0.12$$

Gesucht sind alle x mit $|f'(x)| \leq 0.05$, also mit $-0.05 \leq -0.012x + 0.12 \leq 0.05$.

Linke Ungleichung:

$$\begin{aligned} -0.012x + 0.12 &\geq -0.05 \quad | -0.12 \\ -0.012x &\geq -0.17 \quad | :(-0.012) \\ x &\leq 14.167 \end{aligned}$$

Rechte Ungleichung:

$$\begin{aligned} -0.012x + 0.12 &\leq 0.05 \quad | -0.12 \\ -0.012x &\leq -0.07 \quad | :(-0.012) \\ x &\geq 5.833 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5.833 \leq x \leq 14.167$$

Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Zwischen etwa 5.83 cm und 14.17 cm ändert sich der Radius nur langsam. In diesem Bereich verläuft der Einsatz so flach, dass die Fertigungsvorgabe für die Steigung eingehalten wird.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**