DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 9WAjLt

Bei einer großen Veranstaltung (z. B. Messe, Konzert oder Festival) wird der Einlass über Scanner geregelt. Schon kurz nach Öffnung kommen viele Besucher gleichzeitig, während die Abfertigung zunächst durch Personalbesetzung und Sicherheitschecks begrenzt ist. Dadurch entsteht eine Warteschlange, die sich im Verlauf wieder abbauen kann – oder im ungünstigen Fall weiter anwächst. Es wird zwischen zwei Größen unterschieden:
Ankunftsrate $A(t)$: Anzahl ankommender Personen pro Minute
Abfertigungsrate $S(t)$: Anzahl abgefertigter Personen pro Minute
Dabei gilt t in Minuten nach Öffnung, $0 \leq t \leq 60$. Zu Beginn stehen bereits $W(0) = 120$ Personen in der Warteschlange.

Ankunftsrate: $A(t) = -0.02t^2 + 1.2t + 25$
Abfertigungsrate (konstant): $S(t) = 35$

a) Stellen Sie ein Modell für die Warteschlange $W(t)$ auf, indem Sie eine geeignete Bilanzgleichung formulieren. Bestimmen Sie anschließend die Warteschlangenlänge $W(60)$. **Tipp**: Der Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe lautet $W'(t) = A(t) - S(t)$.

$$\begin{aligned} W'(t) &= A(t) - S(t) \\ &= -0.02t^2 + 1.2t + 25 - 35 \\ &= -0.02t^2 + 1.2t - 10 \end{aligned}$$

Durch Integrieren erhält man:

$$\begin{aligned} W(t) &= \int (-0.02t^2 + 1.2t - 10)\, dt \\ &= -\frac{1}{150}t^3 + 0.6t^2 - 10t + C \end{aligned}$$

Mit $W(0) = 120$ folgt:

$$\begin{aligned} W(0) &= 120 \\ -\frac{1}{150} \cdot 0^3 + 0.6 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + C &= 120 \\ C &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W(t) &= -\frac{1}{150}t^3 + 0.6t^2 - 10t + 120 \\ W(60) &= -\frac{1}{150} \cdot 60^3 + 0.6 \cdot 60^2 - 10 \cdot 60 + 120 \\ &= -1440 + 2160 - 600 + 120 \\ &= 240 \end{aligned}$$

Nach 60 Minuten befinden sich also noch 240 Personen in der Warteschlange.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Einsatzleitung ist wichtig, wann die Schlange am längsten ist, um Personal gezielt zu verlagern. Ermitteln Sie den Zeitpunkt und die maximale Warteschlangenlänge im Modell.

$$W'(t) = -0.02t^2 + 1.2t - 10$$
$$W''(t) = -0.04t + 1.2$$

notw. Bed.: $W'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.02t^2 + 1.2t - 10 \quad | :(-0.02) \\ &= t^2 - 60t + 500 \\ t_{1/2} &= 30 \pm \sqrt{30^2 - 500} \\ t_1 &= 50 \quad \vee \quad t_2 = 10 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $W'(t) = 0 \quad \wedge \quad W''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} W''(50) &= -0.04 \cdot 50 + 1.2 = -0.8 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ W''(10) &= -0.04 \cdot 10 + 1.2 = 0.8 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $W(t) = y$

$$\begin{aligned} W(50) &= \frac{860}{3} \approx 286.667 \qquad \Rightarrow \text{HP}(50 \mid 286.67) \\ W(10) &= \frac{220}{3} \approx 73.333 \qquad \Rightarrow \text{TP}(10 \mid 73.33) \end{aligned}$$

Randwerte:

$$W(0) = 120 \quad \wedge \quad W(60) = 240$$

Die Randwerte sind kleiner als $W(50)$. Die Warteschlange ist also nach 50 Minuten am längsten. Die maximale Warteschlangenlänge beträgt rund 287 Personen.

c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Ankunftsrate im Zeitraum $[0; 60]$. Nutzen Sie dazu den Mittelwert der Funktion $A(t)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{60 - 0} \int_0^{60} (-0.02t^2 + 1.2t + 25)\, dt \\ &= \frac{1}{60} \left[-\frac{1}{150} t^3 + 0.6t^2 + 25t \right]_0^{60} \\ &= \frac{1}{60} \left(-\frac{1}{150} \cdot 60^3 + 0.6 \cdot 60^2 + 25 \cdot 60 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{60} \left(-1440 + 2160 + 1500 \right) \\ &= \frac{2220}{60} = 37 \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Ankunftsrate beträgt also 37 Personen pro Minute.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die maximale Ankunftsrate im Zeitraum $[0; 60]$ die Abfertigungsrate übersteigt. Für die Personalplanung gilt die Regel: Übersteigt die maximale Ankunftsrate die Abfertigungsrate um mehr als 20 %, soll weiteres Einlasspersonal eingesetzt werden. Entscheiden Sie, ob Personal aufgestockt werden muss.

$$A'(t) = -0.04t + 1.2$$
$$A''(t) = -0.04$$

notw. Bed.: $A'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.04t + 1.2 && | -1.2 \\ -0.04t &= -1.2 && | :(-0.04) \\ t &= 30 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $A'(t) = 0 \quad \wedge \quad A''(t) \neq 0$

$$A''(30) = -0.04 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $A(t) = y$

$$A(30) = -0.02 \cdot 30^2 + 1.2 \cdot 30 + 25 = 43 \qquad \Rightarrow \text{HP}(30 \mid 43)$$

Randwerte:

$$A(0) = 25 \quad \wedge \quad A(60) = 25$$

Die maximale Ankunftsrate beträgt also 43 Personen pro Minute, die Abfertigungsrate 35 Personen pro Minute.

$$\begin{aligned} p &= \frac{43 - 35}{35} \cdot 100\,\% \\ &= \frac{8}{35} \cdot 100\,\% \\ &\approx 22.86\,\% \end{aligned}$$

Die maximale Ankunftsrate übersteigt die Abfertigungsrate also um etwa 22.86 %. Da $22.86\,\% > 20\,\%$ ist, muss weiteres Einlasspersonal eingesetzt werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**