DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 8miqUc

In einem Windpark in der Nähe von Dortmund wird die elektrische Leistung einer Anlage über einen windigen Vormittag hinweg ausgewertet. Die Betreiber möchten verstehen, wann die Anlage tatsächlich Strom liefert, wann sie wieder „ausläuft“, und zu welchen Zeitpunkten die Leistung besonders stark steigt oder wieder abflacht. Das ist wichtig, weil Wartungsteams nur dann an der Anlage arbeiten dürfen, wenn die Leistung sehr niedrig ist und keine gefährlichen Lastwechsel auftreten.
Zur Modellierung wird die Leistung $P(t)$ (in MW) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit Beginn der Messung) für einen bestimmten Tag durch folgende Funktion beschrieben:
$P(t) = 0.01t^4 - 0.24t^3 + 1.64t^2 - 2.4t$

a) Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchen Zeitpunkten die Anlage laut Modell genau 0 MW liefert. Interpretieren Sie diese Zeitpunkte im Sachzusammenhang.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.01t^4 - 0.24t^3 + 1.64t^2 - 2.4t && | :0.01 \\ &= t^4 - 24t^3 + 164t^2 - 240t \\ &= t(t^3 - 24t^2 + 164t - 240) && | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$0 = t^3 - 24t^2 + 164t - 240 \qquad | \, t_2 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -24 & 164 & -240 \\ 2 & & 2 & -44 & 240 \\ \hline & 1 & -22 & 120 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 22t + 120 \\ t_{3/4} &= 11 \pm \sqrt{11^2 - 120} \\ t_3 &= 12 \quad \vee \quad t_4 = 10 \end{aligned}$$

Zu Beginn sowie nach 2, 10 und 12 Stunden beträgt die Leistung der Anlage 0 MW. Die Anlage liefert zu diesen Zeitpunkten also gerade keine elektrische Leistung, etwa weil der Wind nicht ausreicht oder die Anlage gerade anläuft bzw. ausläuft.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie die Zeitpunkte und die Höhe des maximalen Leistungswertes. Formulieren Sie anschließend einen Satz, was dieser Zeitpunkt für die Einsatzplanung bedeutet.

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

$$\begin{aligned} P'(t) &= 0.04t^3 - 0.72t^2 + 3.28t - 2.4 \\ P''(t) &= 0.12t^2 - 1.44t + 3.28 \\ P'''(t) &= 0.24t - 1.44 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $P'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.04t^3 - 0.72t^2 + 3.28t - 2.4 && \mid :0.04 \\ &= t^3 - 18t^2 + 82t - 60 && \mid t_1 = 6 \end{aligned}$$

	1	− 18	82	− 60
6		6	− 72	60
	1	− 12	10	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 12t + 10 \\ t_{2/3} &= 6 \pm \sqrt{6^2 - 10} \\ t_2 &\approx 11.099 \quad \vee \quad t_3 \approx 0.901 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $P'(t) = 0 \quad \wedge \quad P''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} P''(6) &= 0.12 \cdot 6^2 - 1.44 \cdot 6 + 3.28 = -1.04 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ P''(11.099) &\approx 2.08 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ P''(0.901) &\approx 2.08 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $P(t) = y$

$$P(6) = 0.01 \cdot 6^4 - 0.24 \cdot 6^3 + 1.64 \cdot 6^2 - 2.4 \cdot 6 = 5.76 \qquad \Rightarrow \text{HP}(6 \mid 5.76)$$

Der maximale Leistungswert beträgt also 5.76 MW und wird nach 6 Stunden erreicht.

Für die Einsatzplanung bedeutet das: Nach 6 Stunden arbeitet die Anlage mit ihrer höchsten modellierten Leistung. In dieser Phase sollten Wartungsarbeiten vermieden werden, da die Belastung der Anlage dort besonders hoch ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Die Betreiber möchten einen Zeitpunkt finden, an dem die Leistung zwar noch steigt, aber der Anstieg nicht mehr schneller wird, weil dann häufig das Schwingungsverhalten der Anlage ruhiger wird. Untersuchen Sie dafür den Graphen auf solche Zeitpunkte und deuten Sie die Ergebnisse.

$$P''(t) = 0.12t^2 - 1.44t + 3.28$$
$$P'''(t) = 0.24t - 1.44$$

notw. Bed.: $P''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.12t^2 - 1.44t + 3.28 \qquad | :0.12 \\ &= t^2 - 12t + \frac{82}{3} \\ t_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{6^2 - \frac{82}{3}} \\ t_1 &\approx 8.944 \quad \vee \quad t_2 \approx 3.056 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $P''(t) = 0 \quad \wedge \quad P'''(t) \neq 0$

$$P'''(8.944) = 0.24 \cdot 8.944 - 1.44 \approx 0.707 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$P'''(3.056) = 0.24 \cdot 3.056 - 1.44 \approx -0.707 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $P(t) = y$

$$P(8.944) \approx 2.004 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(8.94 \mid 2)$$
$$P(3.056) \approx 2.004 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3.06 \mid 2)$$

Da die Leistung noch steigen soll, kommt nur der Zeitpunkt $t \approx 3.056$ in Frage, da dieser zwischen Tiefpunkt und Hochpunkt liegt. Bis zu diesem Zeitpunkt wird der Anstieg der Leistung immer größer. Ab dort steigt die Leistung zwar weiterhin, aber die Zunahme wird immer geringer, bis sie am Hochpunkt schließlich nicht mehr weiter anwächst. Bei $t \approx 8.944$ sinkt die Leistung bereits.

d) Prüfen Sie, ob das Modell im betrachteten Zeitraum negative Leistungswerte liefern könnte. Falls ja: Erklären Sie kurz, wie man das Modell in der Praxis interpretieren müsste und wieso solche Werte theoretisch realistisch sind.

Aus a) folgt: $P(t) = 0$ bei $t = 0$, $t = 2$, $t = 10$ und $t = 12$. Zwischen diesen Nullstellen wechselt das Vorzeichen. Prüfwerte:

$$P(1) = 0.01 \cdot 1^4 - 0.24 \cdot 1^3 + 1.64 \cdot 1^2 - 2.4 \cdot 1 = -0.99 < 0$$
$$P(11) = 0.01 \cdot 11^4 - 0.24 \cdot 11^3 + 1.64 \cdot 11^2 - 2.4 \cdot 11 = -0.99 < 0$$

Ja, das Modell liefert im betrachteten Zeitraum auch negative Leistungswerte, nämlich zwischen $t = 0$ und $t = 2$ sowie zwischen $t = 10$ und $t = 12$. Dort liegt der Graph unterhalb der t-Achse.

In der Praxis würde man negative Leistungswerte nicht als „negative Stromerzeugung“ im engeren Sinn deuten, sondern als Phase, in der die Anlage mehr Energie für Hilfssysteme, Steuerung, Anfahren oder Bremsvorgänge benötigt, als sie gerade einspeist. Solche Werte können theoretisch realistisch sein, weil ein mathematisches Modell auch Übergangsbereiche beschreibt, in denen die Nettoleistung kurzfristig negativ wird.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**