DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 8PKPh6

Bestimmen Sie zuerst die drei Nullstellen und anschließend den geometrischen Flächeninhalt im Intervall zwischen der kleinsten und der größten Nullstelle.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \, x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 - x - 6$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$x_{2/3} = 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6}$$

$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -2$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 1 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{5}{2} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2)\right) \\ &= \frac{37}{12} - \left(-\frac{38}{3}\right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 - \frac{5}{2}\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right) \\
&= -\frac{9}{4} - \frac{37}{12} \\
&= -\frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\
&= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = 0.5x^3 - x^2 - 2.5x + 3$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^3 - x^2 - 2.5x + 3 \quad | :0.5 \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \, x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q(x) &= x^2 - x - 6 \\ 0 &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 1 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{1} (0.5x^3 - x^2 - 2.5x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{4} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{5}{4} \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2)\right) \\ &= \frac{37}{24} - \left(-\frac{19}{3}\right) \\ &= \frac{63}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{1}^{3} (0.5x^3 - x^2 - 2.5x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x\right]_{1}^{3} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 3^4 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{4} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{4} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) \\ &= -\frac{9}{8} - \frac{37}{24} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{63}{8}\right| + \left|-\frac{8}{3}\right| \\ &= \frac{63}{8} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{253}{24} \approx 10.542 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^3 + 2x^2 - 4x \\ &= x(2x^2 + 2x - 4) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 2x - 4 \qquad | \, :2 \\ &= x^2 + x - 2 \\ x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 0 und 1.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (2x^3 + 2x^2 - 4x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-2}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2\right) \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{1} (2x^3 + 2x^2 - 4x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^4 + \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 0 \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{16}{3}\right| + \left|-\frac{5}{6}\right| \\ &= \frac{16}{3} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{37}{6} \approx 6.167 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$$0 = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$

$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -1, 2 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{4}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1)\right) \\ &= \frac{22}{3} - \left(-\frac{47}{12}\right) \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{2}^{3} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{2}^{3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2\right) \\ &= \frac{27}{4} - \frac{22}{3} \\ &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{45}{4}\right| + \left|-\frac{7}{12}\right| \\ &= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{71}{6} \approx 11.833 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + x^2 - 6x \\ &= x(x^2 + x - 6) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + x - 6 \\ x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, 0 und 2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2\right) \\ &= 0 - \left(-\frac{63}{4}\right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 0 \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\ &= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\ &= \frac{253}{12} \approx 21.083 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 2x^2 + 3x \\ &= x(-x^2 + 2x + 3) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 2x + 3 \qquad | \, :(-1) \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -1, 0 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{0} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) \\ &= 0 - \frac{7}{12} \\ &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{3} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{0}^{3} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 3^4 + \frac{2}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 0 \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left| -\frac{7}{12} \right| + \left| \frac{45}{4} \right| \\ &= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} \\ &= \frac{71}{6} \approx 11.833 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = 2x^3 - 18x$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^3 - 18x \\ &= x(2x^2 - 18) \qquad | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 18 &= 0 \qquad | \; +18 \\ 2x^2 &= 18 \qquad | \; :2 \\ x^2 &= 9 \qquad | \; \sqrt{} \\ x_2 = 3 \quad &\vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, 0 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^{0} (2x^3 - 18x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right]_{-3}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-3)^4 - 9 \cdot (-3)^2\right) \\ &= 0 - \left(-\frac{81}{2}\right) \\ &= \frac{81}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{3} (2x^3 - 18x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right]_{0}^{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^4 - 9 \cdot 3^2 - 0 \\ &= -\frac{81}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{81}{2}\right| + \left|-\frac{81}{2}\right| \\ &= \frac{81}{2} + \frac{81}{2} \\ &= 81 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 24x$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^3 + 2x^2 + 24x \\ &= x(-2x^2 + 2x + 24) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^2 + 2x + 24 \qquad | \, :(-2) \\ &= x^2 - x - 12 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 12} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, 0 und 4.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^{0} (-2x^3 + 2x^2 + 24x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 12x^2 \right]_{-3}^{0} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-3)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + 12 \cdot (-3)^2 \right) \\ &= 0 - \frac{99}{2} \\ &= -\frac{99}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{4} (-2x^3 + 2x^2 + 24x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 12x^2 \right]_{0}^{4} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 4^4 + \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 12 \cdot 4^2 - 0 \\ &= \frac{320}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left| -\frac{99}{2} \right| + \left| \frac{320}{3} \right| \\ &= \frac{99}{2} + \frac{320}{3} \\ &= \frac{937}{6} \approx 156.167 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^3 - 3x^2 - 18x \\ &= x(3x^2 - 3x - 18) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 3x - 18 \qquad | \, :3 \\ &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 0 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 3x^2 - 18x)\, dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2\right]_{-2}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{3}{4} \cdot (-2)^4 - (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2\right) \\ &= 0 - (-16) \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{3} (3x^3 - 3x^2 - 18x)\, dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2\right]_{0}^{3} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 3^4 - 3^3 - 9 \cdot 3^2 - 0 \\ &= -\frac{189}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= |A_1| + |A_2| \\ &= |16| + \left|-\frac{189}{4}\right| \\ &= 16 + \frac{189}{4} \\ &= \frac{253}{4} = 63.25 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**