DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 8MRfVQ

Auf einem Stadtfest in Dortmund betreibt ein Foodtruck einen Pop-up-Stand. Beobachtet wird, wie viele Portionen pro Minute verkauft werden. Zu Beginn ist der Andrang noch gering, dann bildet sich eine Schlange, später flacht das Interesse wieder ab, bis der Stand schließt. Die Verkaufsrate (Portionen pro Minute) wird im Zeitraum von 0 bis 11 Stunden nach Öffnung durch die Funktion

$$v(t) = \frac{5}{864}t^4 - \frac{5}{72}t^3 - \frac{25}{72}t^2 + \frac{125}{27}t \qquad (0 \le t \le 11)$$

modelliert.
Dabei gilt:

- t = Zeit in Stunden seit Öffnung
- $v(t)$ = Verkaufsrate in Portionen pro Minute

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $v(t)$ im Intervall $[0;11]$. Deuten Sie jede Nullstelle im Kontext.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{864}t^4 - \frac{5}{72}t^3 - \frac{25}{72}t^2 + \frac{125}{27}t \quad | :\frac{5}{864} \\ &= t^4 - 12t^3 - 60t^2 + 800t \\ &= t(t^3 - 12t^2 - 60t + 800) \qquad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$0 = t^3 - 12t^2 - 60t + 800 \qquad | \, t_2 = 10$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -12 & -60 & 800 \\ 10 & & 10 & -20 & -800 \\ \hline & 1 & -2 & -80 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 2t - 80 \\ t_{3/4} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 80} \\ t_3 &= 10 \quad \vee \quad t_4 = -8 \end{aligned}$$

$t_4 = -8$ liegt nicht im Intervall $[0;11]$. Die Nullstellen im Intervall sind also $t_1 = 0$ und $t_2 = t_3 = 10$ (doppelte Nullstelle).

Zu Beginn bei $t = 0$ werden noch keine Portionen verkauft. Bei $t = 10$ ist die Verkaufsrate erneut 0; zu diesem Zeitpunkt findet also kein Verkauf mehr statt, der Stand ist praktisch geschlossen oder der Andrang vollständig abgeklungen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $v(t)$ im Intervall $[0;11]$ rechnerisch. Geben Sie zu jeder Extremstelle an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Interpretieren Sie die Extrempunkte im Hinblick auf den Sachkontext.

$$v'(t) = \frac{5}{216}t^3 - \frac{5}{24}t^2 - \frac{25}{36}t + \frac{125}{27}$$
$$v''(t) = \frac{5}{72}t^2 - \frac{5}{12}t - \frac{25}{36}$$

notw. Bed.: $v'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{216}t^3 - \frac{5}{24}t^2 - \frac{25}{36}t + \frac{125}{27} && \mid :\frac{5}{216} \\ &= t^3 - 9t^2 - 30t + 200 && \mid t_1 = 4 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	-9	-30	200
4		4	-20	-200
	1	-5	-50	0

$$0 = t^2 - 5t - 50$$
$$t_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 50}$$
$$t_2 = 10 \quad \vee \quad t_3 = -5$$

Im Intervall $[0;11]$ liegen also die Kandidaten $t_1 = 4$ und $t_2 = 10$.

hinr. Bed.: $v'(t) = 0 \quad \wedge \quad v''(t) \neq 0$

$$v''(4) = \frac{5}{72} \cdot 4^2 - \frac{5}{12} \cdot 4 - \frac{25}{36} = -\frac{5}{4} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$v''(10) = \frac{5}{72} \cdot 10^2 - \frac{5}{12} \cdot 10 - \frac{25}{36} = \frac{25}{12} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $v(t) = y$

$$v(4) = 10 \qquad \Rightarrow \text{HP}(4 \mid 10)$$
$$v(10) = 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}(10 \mid 0)$$

Nach 4 Stunden ist die Verkaufsrate mit 10 Portionen pro Minute am größten (Maximum), der Andrang am Stand ist dort also am höchsten. Bei $t = 10$ liegt ein Tiefpunkt (Minimum) mit Verkaufsrate 0 vor; dort wird nichts mehr verkauft.

c) Der Foodtruck öffnet um 09:30 Uhr. Bestimmen Sie mithilfe der Ergebnisse aus b), um wie viel Uhr die Verkaufsrate am größten ist. Ist diese Uhrzeit plausibel?

Aus b) folgt, dass die Verkaufsrate bei $t = 4$ am größten ist:

$$\text{9:30 Uhr} + 4 \text{ h} = \text{13:30 Uhr}$$

Die Verkaufsrate ist also um 13:30 Uhr am größten.

Diese Uhrzeit ist plausibel, da ein Foodtruck auf einem Stadtfest häufig zur Mittagszeit oder kurz danach den größten Andrang hat.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie die Wendepunkte von $v(t)$ im Intervall $[0;11]$. Beschreiben Sie kurz, was ein Wendepunkt hier bedeutet.

$$v''(t) = \frac{5}{72}t^2 - \frac{5}{12}t - \frac{25}{36}$$
$$v'''(t) = \frac{5}{36}t - \frac{5}{12}$$

notw. Bed.: $v''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{72}t^2 - \frac{5}{12}t - \frac{25}{36} && | :\frac{5}{72} \\ &= t^2 - 6t - 10 \\ t_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 + 10} \\ t_1 &= 3 + \sqrt{19} \approx 7.359 \quad \vee \quad t_2 = 3 - \sqrt{19} \approx -1.359 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0;11]$ liegt also nur $t_1 \approx 7.359$.

hinr. Bed.: $v''(t) = 0 \quad \wedge \quad v'''(t) \neq 0$

$$v'''(7.359) = \frac{5}{36} \cdot 7.359 - \frac{5}{12} \approx 0.605 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $v(t) = y$

$$v(7.359) \approx 4.562 \qquad \Rightarrow \text{WP}(7.36 \mid 4.56)$$

Die Verkaufsrate liegt nach 7.36 Stunden bei 4.56 Portionen pro Minute und nimmt zu diesem Zeitpunkt am schnellsten ab. Das passt dazu, dass der Wendepunkt zwischen dem Hochpunkt und dem Tiefpunkt liegt. Im Sachzusammenhang ändert sich dort die Art der Abnahme: Bis zu diesem Zeitpunkt wird die Verkaufsrate immer schneller kleiner, danach fällt sie zwar weiter, aber nicht mehr so stark wie zuvor.

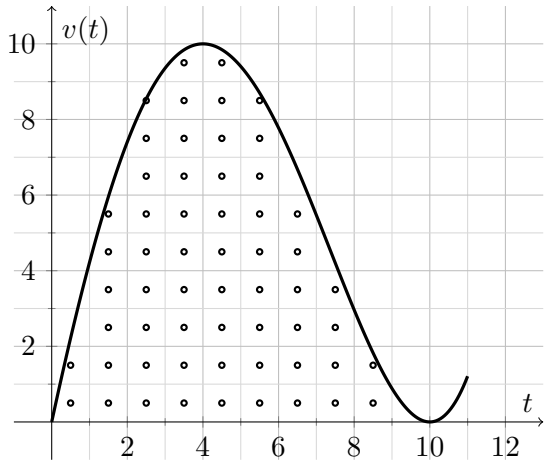
e) Berechnen Sie $v'(t)$ zum Zeitpunkt $t = 2$. Deuten Sie das Ergebnis im Kontext.

$$\begin{aligned} v'(2) &= \frac{5}{216} \cdot 2^3 - \frac{5}{24} \cdot 2^2 - \frac{25}{36} \cdot 2 + \frac{125}{27} \\ &= \frac{70}{27} \approx 2.593 \end{aligned}$$

Zwei Stunden nach der Öffnung steigt die Verkaufsrate noch an. Sie nimmt zu diesem Zeitpunkt um etwa 2.593 Portionen pro Minute je Stunde zu.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem und schätzen Sie die gesamt verkauften Portionen im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 11$, indem Sie den Flächeninhalt unter dem Graphen näherungsweise bestimmen (z. B. durch Zählen der Kästchen).



Für eine Annäherung wurden hier die vollständigen und nahezu vollständigen Kästchen gezählt (zur Übersicht durch einen Punkt markiert). Dies ergibt eine Fläche von 58 Kästchen. Ein Kästchen entspricht 1 Stunde mal 1 Portion pro Minute. Da t in Stunden und $v(t)$ in Portionen pro Minute angegeben ist, muss zur Bestimmung der gesamten verkauften Portionen noch mit 60 multipliziert werden:

$$58 \cdot 60 = 3480$$

Es wurden also im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 11$ näherungsweise 3480 Portionen verkauft (genauer Wert: 58.26 Kästchen $\Rightarrow$ 3495.56 Portionen).

g) Beziehen Sie sich auf den in Teilaufgabe b) ermittelten Hochpunkt. Beurteilen Sie, ob der dortige Funktionswert im Sachzusammenhang plausibel ist (z. B. hinsichtlich typischer Maximalwerte) und begründen Sie Ihre Einschätzung kurz.

Der Hochpunkt aus b) lautet HP(4 | 10).

Das bedeutet, dass der Foodtruck in seiner Spitzenphase etwa 10 Portionen pro Minute verkauft.

Dieser Wert ist sehr hoch, aber auf einem gut besuchten Stadtfest mit vorbereitetem Essen, mehreren Mitarbeitenden und schnellem Verkauf grundsätzlich noch vorstellbar. Für einen kleinen Foodtruck wäre dieser Wert eher an der oberen Grenze, für einen stark frequentierten Stand aber noch plausibel.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**