DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 893eXV

Bilden Sie für folgende Funktionen die Ableitungen mit Hilfe der h-Methode. Nutzen Sie als Hilfe ggf. das Pascal'sche Dreieck, um sich unnötige Rechenarbeit zu ersparen. Geben Sie ebenfalls die Nullstellen der Funktionen an.

a) $f(x) = x^4$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} \\ &= 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 \quad | \sqrt[4]{} \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^3 + 2x^2$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - (x^3 + 2x^2)}{h} \\
&= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x^2 + 4xh + 2h^2 - x^3 - 2x^2}{h} \\
&= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 4xh + 2h^2}{h} \\
&= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 4x + 2h)}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2 + 4x + 2h \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 + 4x + 2h) \\
&= 3x^2 + 4x
\end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 + 2x^2 \\
&= x^2(x+2) \quad | \, x_1 = 0 \\
\\
0 &= x + 2 \qquad | \, -2 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = 4x^2 + 3x$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{4(x+h)^2 + 3(x+h) - (4x^2 + 3x)}{h} \\
&= \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 + 3x + 3h - 4x^2 - 3x}{h} \\
&= \frac{8xh + 4h^2 + 3h}{h} \\
&= \frac{h(8x + 4h + 3)}{h} \\
&= 8x + 4h + 3 \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0}(8x + 4h + 3) \\
&= 8x + 3
\end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned}
0 &= 4x^2 + 3x \\
&= x(4x + 3) \quad | \, x_1 = 0 \\
\\
0 &= 4x + 3 \quad | \, -3 \\
4x &= -3 \quad | \, :4 \\
x_2 &= -0.75
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 4 - (x^2 - 2x + 4)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 4 - x^2 + 2x - 4}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 2h}{h} \\ &= \frac{h(2x + h - 2)}{h} \\ &= 2x + h - 2 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} (2x + h - 2) \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x + 4 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 4} \\ &= 1 \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine Nullstellen

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^3 - 4x$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{(x+h)^3 - 4(x+h) - (x^3 - 4x)}{h} \\
&= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - x^3 + 4x}{h} \\
&= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h} \\
&= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 4)}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2 - 4 \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 4) \\
&= 3x^2 - 4
\end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 - 4x \\
&= x(x^2 - 4) && | \; x_1 = 0 \\
\\
0 &= x^2 - 4 && | \; +4 \\
x^2 &= 4 && | \; \sqrt{} \\
x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^2 + 9$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 + 9 - (x^2+9)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 9 - x^2 - 9}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0}(2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 9 && | -x^2 \\ -x^2 &= 9 && | \cdot(-1) \\ x^2 &= -9 \end{aligned}$$

Ein Quadrat kann nicht negativ sein. ⇒ keine Nullstellen

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**