DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 83ZSk9

In einer Abfüllanlage für Speiseöl wird eine digitale Waage direkt hinter dem Füllventil eingesetzt. Bei jedem Flaschenwechsel schwingt das System kurz nach, weil das Ventil nachregelt und das Förderband minimal vibriert. Für die Qualitätskontrolle wird daher die Füllmassen-Abweichung $e(t)$ (in g) relativ zum Sollwert (z. B. 500 g) während der ersten Sekunden nach dem Start eines Abfüllvorgangs modelliert. Positive Werte bedeuten: zu viel eingefüllt, negative Werte: zu wenig. Die Zeit t wird in Sekunden seit Beginn des Abfüllvorgangs gemessen.
Folgende gerundete Messwerte wurden festgehalten:

t **(s)**	0	4	8	12
$e(t)$ **(g)**	0.2	1.1	0.6	0.9

a) Um die Startphase der Waage beurteilen zu können, soll aus den Messwerten ein Modell erstellt werden: Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades $e(t)$, die die Abweichung e (in g) in Abhängigkeit von t (in s) beschreibt.

$$e(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$\begin{aligned}
e(0) = 0.2 \quad &\Rightarrow \quad 0.2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d && = d \\
e(4) = 1.1 \quad &\Rightarrow \quad 1.1 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 0.2 && = 64a + 16b + 4c + 0.2 \\
e(8) = 0.6 \quad &\Rightarrow \quad 0.6 = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 + 0.2 && = 512a + 64b + 8c + 0.2 \\
e(12) = 0.9 \quad &\Rightarrow \quad 0.9 = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + 0.2 && = 1728a + 144b + 12c + 0.2
\end{aligned}$$

Mit $d = 0.2$ bleiben drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
64a + 16b + 4c + 0.2 &= 1.1 \quad | -0.2 \\
64a + 16b + 4c &= 0.9 \\
\\
512a + 64b + 8c + 0.2 &= 0.6 \quad | -0.2 \\
512a + 64b + 8c &= 0.4 \\
\\
1728a + 144b + 12c + 0.2 &= 0.9 \quad | -0.2 \\
1728a + 144b + 12c &= 0.7
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 16 & 4 & 0.9 \\ 512 & 64 & 8 & 0.4 \\ 1728 & 144 & 12 & 0.7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 8 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 27 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 16 & 4 & 0.9 \\ 0 & -64 & -24 & -6.8 \\ 0 & -288 & -96 & -23.6 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 16 & 4 & 0.9 \\ 0 & -64 & -24 & -6.8 \\ 0 & 0 & 24 & 14 \end{array}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{aligned}
\text{III}\quad & 24c = 14 && \mid :24\\
& c = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II}\quad & -64b - 24 \cdot \frac{7}{12} = -6.8\\
& -64b - 14 = -6.8 && \mid +14\\
& -64b = 7.2 && \mid :(-64)\\
& b = -0.1125 = -\frac{9}{80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}\quad & 64a + 16 \cdot \left(-\frac{9}{80}\right) + 4 \cdot \frac{7}{12} = 0.9\\
& 64a + \frac{8}{15} = 0.9 && \mid -\frac{8}{15}\\
& 64a = \frac{11}{30} && \mid :64\\
& a = \frac{11}{1920}\\
& \Rightarrow e(t) = \frac{11}{1920}t^3 - \frac{9}{80}t^2 + \frac{7}{12}t + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

b) Für die Abnahme gilt: Die Anlage darf im Mittel über die ersten 12 Sekunden höchstens +0.6 g vom Sollwert abweichen. Prüfen Sie anhand des mittleren Fehlers, ob die Abnahmebedingung erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{12-0}\int_0^{12}\left(\frac{11}{1920}t^3 - \frac{9}{80}t^2 + \frac{7}{12}t + \frac{1}{5}\right)dt\\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{11}{7680}t^4 - \frac{3}{80}t^3 + \frac{7}{24}t^2 + \frac{1}{5}t\right]_0^{12}\\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{11}{7680}\cdot 12^4 - \frac{3}{80}\cdot 12^3 + \frac{7}{24}\cdot 12^2 + \frac{1}{5}\cdot 12 - 0\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(29.7 - 64.8 + 42 + 2.4\right)\\
&= \frac{1}{12}\cdot 9.3 = \frac{31}{40} = 0.775
\end{aligned}$$

Der mittlere Fehler beträgt 0.775 g. Da $0.775 > 0.6$ gilt, wird der erlaubte Wert um 0.175 g überschritten. Die Abnahmebedingung ist nicht erfüllt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Zusätzlich gilt als Sicherheitsgrenze: Zu keinem Zeitpunkt in $[0;12]$ darf die Abweichung größer als 1.5 g sein. Prüfen Sie, ob das Modell diese Grenze einhält.

$$e'(t) = \frac{11}{640}t^2 - \frac{9}{40}t + \frac{7}{12}$$
$$e''(t) = \frac{11}{320}t - \frac{9}{40}$$

notw. Bed.: $e'(t) = 0$

$$0 = \frac{11}{640}t^2 - \frac{9}{40}t + \frac{7}{12} \qquad | :\frac{11}{640}$$
$$= t^2 - \frac{144}{11}t + \frac{1120}{33}$$
$$t_{1/2} = \frac{72}{11} \pm \sqrt{\left(\frac{72}{11}\right)^2 - \frac{1120}{33}}$$
$$t_1 \approx 9.529 \quad \vee \quad t_2 \approx 3.562$$

hinr. Bed.: $e'(t) = 0 \quad \wedge \quad e''(t) \neq 0$

$$e''(9.529) = \frac{11}{320} \cdot 9.529 - \frac{9}{40} \approx 0.103 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$e''(3.562) = \frac{11}{320} \cdot 3.562 - \frac{9}{40} \approx -0.103 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $e(t) = y$

$$e(9.529) \approx 0.501 \qquad \Rightarrow \text{TP}(9.53 \mid 0.5)$$
$$e(3.562) \approx 1.109 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3.56 \mid 1.11)$$

Zusätzlich werden die Randwerte betrachtet:

$$e(0) = 0.2$$
$$e(12) = 0.9$$

Der größte Wert im Intervall $[0;12]$ ist also $e(3.562) \approx 1.109$. Da $1.109 < 1.5$ gilt, wird die Sicherheitsgrenze von maximal 1.5 g eingehalten.

d) Falls eine der Bedingungen nicht erfüllt ist: Formulieren Sie eine kurze Empfehlung an die Schichtleitung und begründen Sie diese mit Kennwerten aus Ihren Ergebnissen. Gehen die Ungenauigkeiten der Befüllung zu Lasten des Kunden oder des Unternehmens?

Empfehlung an die Schichtleitung: Die Anlage sollte in der Startphase nachjustiert werden, da die Abnahmebedingung für den mittleren Fehler nicht eingehalten wird. Zwar bleibt die maximale Abweichung mit etwa 1.11 g unter der Sicherheitsgrenze von 1.5 g, aber die mittlere Abweichung beträgt 0.775 g und liegt damit über dem erlaubten Wert von 0.6 g.

Da der mittlere Fehler positiv ist, wird im Durchschnitt zu viel Speiseöl eingefüllt. Die Ungenauigkeiten gehen also zu Lasten des Unternehmens.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**